Quelques Exercices d'oraux niveau MP

Tancrède Lepoint

Juin 2008

Résumé

Voici quelques exercices de révisions faits en MP* en juin 2008 au lycée Henri Poincaré de Nancy. Vous trouverez 28 exercices détaillés, avec leur provenance et leur correction. Bonnes révisions à tous les préparationnaires.

Table des matières

1 Analyse

1.1 Suites et Séries

Exercice 1 (*ENS Cachan MP 2007*)

> *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que, pour toute suite $(b_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite nulle, la série de terme général a_nb_n est convergente. Montrer que la série de terme général a_n est absolument convergente.*

Démonstration : On suppose que $\sum |a_n|$ diverge.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. On a $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On a par définition $|a_n| = S_n - S_{n-1}$, d'où $\dfrac{|a_n|}{S_{n-1}} = \dfrac{S_n}{S_{n-1}} - 1 \underbrace{\geq}_{\text{Inégalité du log}} \ln S_n - \ln S_{n-1}$.

Donc $\sum_{n=1}^{N} \ln S_n - \ln S_{n-1} = \ln S_N - \ln S_0 \underset{N\longmapsto+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

En prenant $b_n = \dfrac{\text{sign } a_n}{S_{n-1}} \underset{n\longmapsto+\infty}{\longrightarrow} 0$, et on a la série de terme général $a_nb_n = \dfrac{|a_n|}{S_{n-1}}$ diverge, ce qui est faux. ∎

1.2 Equations différentielles

Exercice 2 (***Centrale PC 2007***)

> *Soient f et g de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f' = g \circ f$. Montrer que f est monotone*

Démonstration : On se place sur $\mathbb{R}$ pour résoudre cet exercice.

Soit l'équation différentielle

$$y' = g(y)$$

Comme g est $\mathcal{C}^1$, les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont vérifiées et on peut donc l'appliquer.

- Supposons qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_1) = 0$. On en déduit que $g(f(x_1)) = 0$ et la fonction $f \longmapsto f(x_1)$ constante répond au problème de Cauchy en $(x_1, f(x_1))$. Or f solution de ce même problème de Cauchy, donc par unicité de la solution, $f \equiv f(x_1)$ et f monotone.
- Sinon, f' ne s'annule pas et est continue, donc garde un signe constant, ce qui implique la stricte monotonie de f. ■

1.3 Espaces vectoriels normés et fonctions à valeurs réelles

Exercice 3 (***ENS MP 2007***)

> *Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ possède exactement n racines réelles distinctes ?*

Démonstration : On résout cet exercice par récurrence en notant $\mathcal{P}_n$ un tel polynôme de degré n.

- $\mathcal{P}_1 = X - 1$ convient.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit construit.
  Si $x_1 < \cdots < x_n$ sont les racines de $\mathcal{P}_n$, il existe $y_0, \ldots, y_n$ tels que
  $$y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_n < y_n$$
  On note $\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n + \varepsilon X^{n+1}$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que pour tout i, $\mathcal{P}_n(y_i)$ et $\mathcal{P}_{n+1}(y_i)$ soient de même signe. Si n est pair, la limite de $\mathcal{P}_{n+1}$ est $-\infty$ en $-\infty$ (alors que celle de $\mathcal{P}_n$ est $+\infty$). L'existence des $n+1$ racines distinctes est donc assurée par le théorème des valeurs intermédiaires. ■

Exercice 4

> *Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est au plus dénombrable.*

Démonstration : Soit f une fonction réglée, c'est-à-dire limite uniforme de fonctions en escalier. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f. On note D_n l'ensemble des points de discontinuité de f_n. Cet ensemble est dénombrable. Or l'ensemble des points de discontinuité de f est $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, union d'ensembles dénombrables donc il est dénombrable. ■

Exercice 5 (***MP 2007***)

> *Soient $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$ et $|||.|||$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui lui est associée. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que 1 est valeur propre de A et $|||A||| \leq 1$. Montrer que 1 est racine simple du polynôme minimal de A.*

■

Démonstration :

2 Algèbre

2.1 Algèbre linéaire

Exercice 6 (*Mines-Ponts MP 2007*)

> *Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{R}$ une partie de $\mathcal{L}(E)$ telle que les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de $\mathcal{R}$ sont E et $\{0\}$.*
> a. *Montrer que si f commute avec tous les éléments de $\mathcal{R}$ alors f est une homothétie.*
> b. *Ce résultat subsiste-t-il si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?*

Démonstration : a. Soit λ une valeur propre de f. Soit $E_\lambda(f)$ l'espace propre associé à cette valeur propre. $E_\lambda(f)$ est stable par tous les éléments de $\mathcal{R}$ (car f commute avec tous les éléments de $\mathcal{R}$), donc $E_\lambda(f) = E$ (ou $E_\lambda(f) = \{0\}$, impossible). On en déduit que $f = \lambda \mathrm{id}_E$

b. On prend $\mathcal{R}$ l'ensemble des rotations vectorielles, c'est-à-dire $\mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$, et f la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ (par exemple, en fait n'importe quelle rotation d'angle différent de 0 (mod π)). f commute avec tous les éléments de $\mathcal{R}$, mais n'est pas une homothétie. ■

Exercice 7 (*Mines-Ponts MP 2007*)

> *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\exp(A)$ est dans $\mathbb{C}[A]$.*

Démonstration : Soit $B_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{A^j}{j!} \in \mathbb{C}[A] \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a donc $\mathbb{C}[A]$ qui est donc un sous-espace vectoriel de dimension finie, et est donc fermé. On en déduit que $B_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} e^A \in \mathbb{C}[A]$ ■

Exercice 8 (*Mines-Ponts MP 2007*)

> *Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.*
> a. *Montrer que AB est une matrice de projecteur.*
> b. *Montrer que $BA = I_2$.*

Démonstration : a. On vérifie que $AB \times AB = AB$

b. On a, d'après l'égalité de la question a, $A(BA - I_2)B = 0$. En multipliant par B à gauche et A à droite on obtient en développant $BA^3 - BA^2 = 0$. Le polynôme $P = X^3 - X^2 = X^2(X-1)$ est annulateur. D'autre part, $\mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB) = 2$, et comme $\mathrm{Sp}(BA) \subset \{0, 1\}$ (racines de P), on déduit que 1 est deux fois valeur propre pour BA, et que son polynôme caractéristique $\chi_{BA} = (X-1)^2$. Le polynôme minimal de BA divise P et χ_{BA} donc c'est $(X-1)$ et $BA = I_2$ ■

Exercice 9 (*Mines-Ponts MP 2007*)

> *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.*
> a. *Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A*
> b. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*
> c. *Déterminer $\exp A$*

Démonstration : a. b. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & -X & -1 \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2+1)$.

On se place dans $\mathbb{C}$. On a Sp $A = \{0, -i, i\}$. A a 3 valeurs propres distinctes donc est diagonalisable et son polynôme minimal $\pi_A = \chi_A$

c. On remarque que A est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, d'axe i.

Donc A^k est la rotation d'angle $\frac{k\pi}{2}$ et d'axe i, donc $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{k\pi}{2}) & -\sin(\frac{k\pi}{2}) \\ 0 & \sin(\frac{k\pi}{2}) & \cos(\frac{k\pi}{2}) \end{pmatrix}$.

On a

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^p \end{pmatrix} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{p+1} \\ 0 & (-1)^{p+1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & \cos(1) & -\sin(1) \\ 0 & \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Exercice 10 (*Centrale MP 2007*)

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $uv - vu = \lambda v$. Montrer que v est nilpotente.

Démonstration : On itère la relation : $uv^2 - v^2u = (uv - vu)v + v(uv - vu) = 2\lambda v^2$.

Par récurrence, on déduit que :

$$\forall k \geq 1, uv^k - v^k u = k\lambda v^k$$

Supposons que v n'est pas nilpotente, i.e. $\forall k \geq 1, v^k \neq 0$.

En posant $\phi\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ w & \longmapsto & uw - wu \end{array}$, on obtient la formule que $\forall k \geq 1, \phi(v^k) = k\lambda v^k$ donc ϕ admet une infinité de valeurs propres, ce qui est impossible en dimension finie. ■

'[Remarque] Une deuxième question qui aurait pu être posée est de montrer que les deux endomorphismes sont simultanément trigonalisables.

Exercice 11 (*Polytechnique PC 2007*)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(u, v, w) \in \mathcal{L}(E)^3$ avec w inversible.

a. Si u et w commutent, montrer que u et w^{-1} commutent.

b. Si $u \circ v + u + v = 0$, montrer que u et v commutent.

Démonstration : a. $u \circ w = w \circ u$, on compose par w^{-1} des deux cotés et on obtient $w^{-1} \circ u = u \circ w^{-1}$

b. L'astuce consiste à réintroduire id_E : $u \circ v + u + v = 0$ donc $u \circ v + u + v + \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$

On déduit donc que $(u + \mathrm{id}_E) \circ (v + \mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E$. Reste à conclure en utilisant la question **a** en remarquant que $u \circ (u + \mathrm{id}_E) = (u + \mathrm{id}_E) \circ u$, donc u commute avec $(u + \mathrm{id}_E)^{-1} = (v + \mathrm{id}_E)$ et on en déduit en développant que u et v commutent. ■

2.2 Algèbre bilinéaire

Exercice 12 (***Mines-Ponts MP 2007***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A^tA$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.
a. Montrer que ${}^tAA = 0$
b. Montrer que $A = 0$

Démonstration : a. On a ${}^t({}^tAA) = {}^tAA$ donc ${}^tAA \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe deux matrices P et D respectivement orthogonale et diagonale telles que ${}^tAA = P^{-1}DP$. On déduit que :

$$\overbrace{0}^{\text{car } A^p=0} = \underbrace{({}^tA)^pA^p = ({}^tAA)^p}_{\text{avec la relation de l'énoncé}} = P^{-1}D^pP$$

On en déduit D^p=0, d'où $D = 0$ et ${}^tAA = 0$.

b. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on obtient $({}^tAA)_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = 0$, ce qui implique de $\forall i, j, a_{i,j} = 0$, i.e. $A = 0$ ∎

2.3 Algèbre générale

Exercice 13 (***Mines-Ponts MP 2007***)

Déterminer le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, +, \times)$, et trouver un groupe qui lui soit isomorphe.

Démonstration : Par le cours, les éléments $\overline{k}$ de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ sont inversibles si k premier avec 9, donc le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ est : $\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}\}$

C'est un groupe pour la multiplication qui a 6 éléments, et il est cyclique car engrendré par $\overline{2}$ (en effet $\begin{cases} \overline{2}^0 = \overline{1} \\ \overline{2}^1 = \overline{2} \\ \overline{2}^2 = \overline{4} \\ \overline{2}^3 = \overline{8} \\ \overline{2}^4 = \overline{7} \\ \overline{2}^5 = \overline{5} \\ \overline{2}^6 = \overline{1} \end{cases}$, et donc isomorphe à $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ (ou aux racines $6^{\text{ème}}$ de l'unité). ∎

Exercice 14 (***Mines-Ponts MP 2007***)

Les groupes $((\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*, \times)$ et $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \times)$ sont-ils isomorphes ?

Démonstration : Ici $((\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*, \times)$ est le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, +, \times)$, et non pas les éléments de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ privés de $\overline{0}$!

On a, modulo 7, $\begin{cases} \overline{3}^0 = \overline{1} \\ \overline{3}^1 = \overline{3} \\ \overline{3}^2 = \overline{2} \\ \overline{3}^3 = \overline{6} \\ \overline{3}^4 = \overline{4} \\ \overline{3}^5 = \overline{5} \\ \overline{3}^6 = \overline{1} \end{cases}$, donc $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \times)$ est cyclique engendré par $\overline{3}$ et $((\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*, \times)$ est cyclique engendré par $\overline{2}$. Ils sont donc isomorphes ∎

'[Remarque] Pour aller plus loin. Si p est premier, alors $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \times)$ est cyclique.

Exercice 15 (*Mines-Ponts MP 2007*)

> *Déterminer le chiffre des unités de* 7^{7^7}.

Démonstration : On a $\left\{\begin{array}{l} 7 \equiv 7 \pmod{10} \\ 7^2 \equiv 9 \pmod{10} \\ 7^3 \equiv 3 \pmod{10} \\ 7^4 \equiv 1 \pmod{10} \end{array}\right.$ donc on raisonne modulo 4 pour l'exposant de 7.

On a $7^7 \equiv 3 \pmod 4$, i.e. $\exists k, 7^7 = 4k+3$.

Comme $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$, on a $7^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$ et $7^{7^7} = 7^{4k+3} \equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{10}$. Le chiffre des unités de 7^{7^7} est 3. ∎

Exercice 16 (*Mines-Ponts MP 2007*)

> *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que* $\text{pgcd}(\det A, \det B) = 1$.
> *Montrer qu'il existe U et V des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_n$*

Démonstration : On a $\text{pgcd}(\det A, \det B) = 1$, donc par Bezout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$(\det A)u + (\det B)v = 1 \ (*)$$

De plus, $\det A \neq 0$ et $\det B \neq 0$, d'où A et B inversibles, et les inverses sont données par les formules

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ {}^t Co(A) \text{ et } B^{-1} = \frac{1}{\det B}\ {}^t Co(B)$$

On multiplie $(*)$ par $I_n = AA^{-1} = BB^{-1}$ et en remplaçant avec les formules précédentes on obtient

$$A \times \underbrace{{}^t Co(A) \times u}_{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})} + B \times \underbrace{{}^t Co(B) \times v}_{V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})} = I_n$$

∎

'[Remarque] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. M est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si, et seulement si, $\det M = \pm 1$

Exercice 17 (*Mines-Ponts MP 2007*)

> *Résoudre dans* $\mathbb{R}$: $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ xy+yz+zx=2 \\ x^3+y^3+z^3=9 \end{array}\right.$.

Démonstration : On peut développer $(x+y+z)^3$ et trouver le produit xyz. Mais on peut faire de façon plus astucieuse.

x, y, z sont racines de $X^3 - 3X^2 + 2X - p = 0$ (relations coefficients/racines).

On somme cette relation prise respectivement en x, y et z. D'où $9 - 3(x^2+y^2+z^2) + 6 - 3p = 0$.

Or $x^2+y^2+z^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 5$. On en déduit $p = 0$ et x, y, z racines de $X(X^2 - 3X + 2) = 0$. Donc on a finalement : $(x, y, z) \in \{(0,1,2), (0,2,1), (1,0,2), (1,2,0), (2,1,0), (2,0,1)\}$. ∎

Exercice 18 (*Centrale MP 2007*)

> *Etudier le groupe des inversibles de l'anneau* $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +, \times)$.

Démonstration : L'indicatrice d'euler vaut $\varphi(15) = \varphi(3)\varphi(5) = 8$. Si l'on note $\mathbb{U}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$ l'ensemble des éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +, \times)$, il contient 8 éléments et on a $\mathbb{U}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) = \{\overline{a} \ / \ a \wedge 15 = 1\}$.

$\mathbb{U}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{U}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times \mathbb{U}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ car $3 \wedge 5 = 1$, c'est-à-dire à $(\{\overline{1}, \overline{2}\} \times \{\dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\}, \cdot)$ ou encore à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ ∎

Exercice 19 (*Centrale MP 2007*)

> *Soient A un anneau commutatif et J un idéal de A. On pose $\sqrt{J} = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, a^n \in J\}$. Montrer que $\sqrt{J}$ est un idéal.*

Démonstration : Soit $a \in \sqrt{J}$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n \in J$. Soit $x \in A$. $(ax)^n = \underbrace{a^n}_{\in J} \underbrace{x^n}_{\in A} \in J$.

Soit $a, b \in \sqrt{J}$. Il existe $n_1 \leq n_2$ tels que $a^{n_1} \in J$ et $b^{n_2} \in J$.

$$
\begin{aligned}
(a-b)^{n_1+n_2} &= \sum_{k=0}^{n_1+n_2} \binom{n_1+n_2}{k} a^k (-b)^{n_1+n_2-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1+n_2}{k} a^k \underbrace{(-b)^{n_1+n_2-k}}_{\in J} + \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} \binom{n_1+n_2}{k} \underbrace{a^k}_{\in J} (-b)^{n_1+n_2-k} \in J
\end{aligned}
$$

On déduit que $\sqrt{J}$ est un idéal de A. ■

Exercice 20 (*Polytechnique MP 2007*)

> *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.*

Démonstration : On note $n = \deg P$. On peut écrire P sous la forme $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$

Par récurrence sur $k \in [|0, n-1|]$, on montre que $P^{(k)}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
Par l'absurde, supposons que P a deux coefficients consécutifs nuls. Alors il existe $k_0 \in [|0, n-1|]$ tel que $P^{(k_0)}(0) = P^{(k_0+1)}(0) = 0$ et 0 est racine double de $P^{(k_0)}$ ce qui est absurde. ■

Exercice 21 (*Polytechnique MP 2007*)

> *Soit $n \geq 2$ un entier. Existe-t-il une norme $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que : $\forall (A, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), \|A\| = \|P^{-1}AP\|$?*

Démonstration : Commençons par le cas $n = 2$:
Prenons la matrice $P_2 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'inverse $P_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et la matrice nilpotente $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le produit demandé est

$$P_2^{-1} A_2 P_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, du fait de la continuité de la norme, on obtient $\|A\| = \|0\| = 0$ et $A \neq 0$. Ce qui est absurde.
Dans le cas général $n \geq 2$, un raisonnement avec des matrices par bloc donne la même contradiction (P avec des blocs P_2 sur la diagonale et la matrice A avec des blocs A_2 sur la diagonale). ■

Exercice 22 (*Polytechnique MP 2007*)

> *Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.*

Démonstration : Soit $P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - z_i)^{\alpha_i}$, où λ coefficient dominant de P, z_i ses r racines distinctes d'ordre de multiplicité respectif α_i.

On a la formule

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{X - z_i}$$

Or, P' divise P, donc il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = P'Q$. En comparant les degrés, $\deg Q = 1$ donc il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $Q = \frac{1}{n}(X - \mu)$ (on obtient le $\frac{1}{n}$ en égalant les coefficients dominants). D'où

$$\begin{aligned} \frac{P'}{P} &= \frac{1}{Q} \\ &= \frac{n}{X - \mu} \end{aligned}$$

L'unicité de la décomposition en pôles simple donne $r = 1$ et $\alpha_1 = n$. On en déduit que P est de la forme

$$P = \lambda(X - \mu)^n$$

et réciproquement un tel polynôme convient. ■

Exercice 23 (*Polytechnique MP 2007*)

Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X \sin\theta + \cos\theta)^n$ par $X^2 + 1$.

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe $Q_n, R_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X \sin\theta + \cos\theta)^n = Q_n \times (X^2 + 1) + R_n$ et $\deg R_n < 2$. Si $R_n = a_n X + b_n$, en prenant la valeur en i on a $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = a_n i + b_n$ et par identification (les polynômes sont réels) on déduit que $R_n = \sin(n\theta)X + \cos(n\theta)$ ■

Exercice 24 (*Polytechnique MP 2007*)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(U) \subset U$ où $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

Démonstration : Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré n. On a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|P(e^{i\theta})| = 1$. On en déduit $P(e^{i\theta})\overline{P(e^{i\theta})} = 1$. Or,

$$\begin{aligned} \overline{P(e^{i\theta})} &= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} e^{-ik\theta} \\ &= e^{-in\theta} \left(\sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} e^{i(n-k)\theta} \right) \\ &= e^{-in\theta} \left(\sum_{k=0}^{n} \overline{a_{n-k}} e^{ik\theta} \right) \end{aligned}$$

En posant $Q = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_{n-k}} X^k$ on obtient, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P(e^{i\theta})Q(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$.

Soit $A = X^n - PQ \in \mathbb{C}[X]$. A s'annule sur le cercle unité, a une infinité de racine donc est nul. On en déduit que $X^n = PQ$ or $\deg P = n$ donc $P = aX^n$. Réciproquement, tous les polynômes $P = aX^n \in \mathbb{C}[X]$ avec $|a| = 1$ conviennent. ■

Exercice 25 (*ENS MP 2007*)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant. Montrer que l'ensemble des nombres premiers p tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant : $P(n) \neq 0$ et $P(n) \equiv 0 \pmod{p}$ est infini.

Démonstration : Soit $P = a_0 + \cdots$.
Si $a_0 = 0$, c'est terminé (on prend $n = p$). On suppose dorénavant que $a_0 \neq 0$.

Posons $Q = P(a_0X)$. Tous les coefficents de Q sont divisibles par a_0 donc il existe $Q_0 \in \mathbb{Z}[X]$ de même degré que P tel que $Q = a_0Q_0$ et $Q_0(0) = 1$.

Supposons par l'absurde qu'il n'y ait qu'un nombre fini de nombres premiers p_i qui vérifient les hypothèses, et notons $m = \prod p_i$. Comme $Q_0(mX)$ n'est pas constant, il existe $x \in \mathbb{Z}$ et l premier tels que $l|Q_0(mx)$, c'est-à-dire $Q_0(mx) \equiv 0 \pmod{l}$. Or comme $l|m$, $Q_0(mx) \equiv Q_0(0) \equiv 1 \pmod{l}$ ■

Exercice 26

> *Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P^2 = P(X^2)$.*

Démonstration : Soit $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

On a $P(0) = P(0)^2$ d'où deux possibilités :

- Si $P(0) = 1$, on va montrer par récurrence sur k la propriété $\mathcal{H}_k : P^{(k)}(0) = 0$.
  $\mathcal{H}_1$ est vraie car en dérivant la relation de l'énoncé, $2P'P = XP$ et en 0 la relation donne $2P'(0)P(0) = 0$ et du fait de la caractéristique nulle du corps, $P'(0) = 0$.
  On suppose $\forall i \leq k-1, \mathcal{H}_i$ vérifiée, donc la relation initiale dérivée k fois donne :

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sum_{i=k}^{n} a_i X^{2n-k}}_{\text{Dérivée k-ième de } P(X^2)} \quad &= \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} P^{(i)} P^{(k-i)}}_{\text{Leibniz : dérivée k-ième de} P^2 = P \times P} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \underbrace{P^{(i)}}_{=0 \text{ avec } \mathcal{H}_k} \quad P^{(k-i)} + P^{(k)}P
\end{aligned}$$

  Cette équation prise en 0 donne $P^{(k)}(0) = 0$, d'où $\mathcal{H}_{k+1}$
  On en déduit finalement $P = 1$ car $\forall k \in \mathbb{N},\ k!\, a_k = P^{(k)}(0)$
- Si $P(1) = 0$, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = XQ(X)$, et Q vérifie $X^2Q(X^2) = (XQ(X))^2$, c'est-à-dire $Q(X^2) = Q(X)^2$. Puis on recommence le raisonnement avec Q.

Finalement, les polynômes solutions sont de la forme $P = X^k$ et réciproquement ces polynômes fonctionnent. ■

Exercice 27 (*dSP - forum.prepas.org*)

> *Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA{}^tA = A{}^tAA$. Montrer que A est symétrique.*

Démonstration : On calcule de deux façons différentes $(A{}^tAA)^2$.

$$({}^tAA)^3 = ({}^tAA{}^tA)(A{}^tAA) = (A{}^tAA)^2 = (A{}^tAA)({}^tAA{}^tA) = (A{}^tA)^3$$

On obtient donc

$$({}^tAA)^3 = (A{}^tA)^3$$

En posant $B = ({}^tAA)^3 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on déduit qu'il existe une unique matrice $H \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B = H^3$ (existence et unicité de la racine k-ième d'un endomorphisme symétrique positif), d'où

$${}^tAA = A{}^tA$$

En remplaçant dans l'égalité de l'énoncé, on obtient $A{}^tA{}^tA = A{}^tAA$, puis en multipliant par $(A{}^tA)^{-1}$ (qui existe car A inversible), on obtient $A = {}^tA$

L'existence de la racine k-ième est évidente (on diagonalise, et on prend la racine k-ième), et son unicité se démontre de la manière suivante :

Soit u l'endomorphisme associé à A. Soient h et h' deux endomorphismes tels que $h^k = u = (h')^k$.
Soit λ une valeur propre de u et $x \in \ker(h - \sqrt[k]{\lambda}\,\mathrm{id})$.
On a donc $h(x) = \sqrt[k]{\lambda}x$ d'où $u(x) = \lambda x$ et $x \in \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}) = E_\lambda$. Par des raisons de symétrie, on obtient $\ker(h - \sqrt[k]{\lambda}\,\mathrm{id}) = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}) = \ker(h' - \sqrt[k]{\lambda}\,\mathrm{id})$. Donc $h|_{E_\lambda} = h'|_{E_\lambda}$, et comme u diagonalisable, $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda$ et $h = h'$ ∎

3 Géométrie

Exercice 28 (*ENS Lyon MP 2007*)

> *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :*
> *i) le triangle (a, b, c) est équilatéral*
> *ii) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$*

Démonstration : Si (a, b, c) est équilatéral, c'est équivalent au fait que par la rotation $r(a, \frac{\pi}{3})$ de centre a et de rayon $\frac{\pi}{3}$, on ait soit $b \longmapsto c$ ou bien $c \longmapsto b$. Or, r s'écrit $r(a, \frac{\pi}{3}) \colon z \in \mathbb{C} \longmapsto a + e^{i\frac{\pi}{3}}(z - a)$.

Une condition nécessaire est suffisante est donc que $c = a + e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$ ou $b = a + e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a)$, i.e. que le produit $\left(c - a - e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)\right)\left(b - a - e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a)\right) = 0$. Quand on le développe, on trouve la seconde proposition, et comme on a raisonné par équivalence, ceci conclut la preuve. ∎