

ENIGMES DE FOURMIS

TANCRÈDE LEPOINT

RÉSUMÉ. Après les lutins... les fourmis ! Deux petites énigmes, la première est soumise par Valentin. Merci !

ENIGMES

Première énigme facile¹...

Enigme 1 : Sur une corde tendue de 1 mètre entre deux poteaux se déplacent des fourmis, vers la gauche ou la droite, à vitesse constante de 1 mètre par minute. Quand deux fourmis se rencontrent, elles font instantanément demi-tour et repartent avec la même vitesse.
Pourquoi toutes les fourmis seront tombés de la corde (en arrivant à l'une des extrémités) au bout d'une minute ?

Une seconde un peu plus compliquée, qui nécessite quelques connaissances de mathématiques post-bac.

Enigme 2 : On dispose d'un élastique infiniment extensible, d'une longueur initiale de 10 kilomètres.
Une fourmi se donne pour défi de parcourir tout l'élastique. Chaque jour, elle parcourt la distance de 1 kilomètre, et la nuit, pendant qu'elle se repose, un géant facétieux allonge l'élastique de 10 kilomètres.
Le lendemain matin, la fourmi se réveille, voit qu'elle a un peu avancé pendant la nuit, voit que la longueur de piste qu'il lui reste à parcourir a augmenté, et elle effectue à nouveau son kilomètre quotidien. Et tous les jours cela recommence...
Arrivera-t-elle à son objectif ?

INDICES

- **Enigme 1 :** Que se passe-t-il réellement quand deux fourmis se rencontrent ?
- **Enigme 2 :** Il faut construire des suites dont on trouvera le terme général, en prenant en compte la distance parcourue, et le pourcentage de l'élastique parcouru. Tout repose en fait sur la divergence de la série harmonique...

Date: Mars 2009.

¹surtout quand on a la solution !

SOLUTIONS

Enigme 1 : En fait quand deux fourmis se rencontrent, les deux fourmis jouent des rôles parfaitement symétriques donc c'est comme si elles se traversaient sans se toucher. Du coup, au bout d'une minute, toutes les fourmis seront tombées de la corde.

Enigme 2 : Notons f_n (respectivement f'_n) la position de la fourmi en kilomètre le matin (resp. le soir) du jour $n \geq 1$ (donc $f'_n = f_n + 1$). Notons e_n la longueur en kilomètres de l'élastique le jour $n \geq 1$. De même, notons $p_n = \frac{f_n}{e_n}$ (respectivement $p'_n = \frac{f'_n}{e_n}$) le pourcentage parcouru de l'élastique le matin (resp. le soir) du jour $n \geq 1$.

- Le premier jour, $e_1 = 10$, $f_1 = 0$, $f'_1 = 1$, $p_1 = 0$, $p'_1 = \frac{1}{10}$.
- Au jour $n \geq 2$, on a

$$e_n = e_{n-1} + 10 = ne_1 = 10n$$

Le pourcentage de l'élastique parcouru n'ayant pas varié pendant la nuit, on a

$$p_n = p'_{n-1} = \frac{f'_{n-1}}{e_{n-1}} = \frac{f_{n-1} + 1}{e_{n-1}} = p_{n-1} + \frac{1}{10(n-1)}$$

Comme $p_1 = 0$, on en déduit que

$$p_n = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

On retrouve ici la série harmonique, qui diverge vers $+\infty$, il suffit donc de résoudre $p_n = 1$, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 10$$

Et on trouve $n = 12367$. C'est donc le 12367^{ème} jour que la fourmi atteindra le bout de l'élastique et relèvera son défi !

Remarque : Bien entendu, ça n'a pas vraiment de sens... au bout de 34 ans, la fourmi sera morte de faim, de soif, et l'on va avoir du mal à trouver un élastique aussi extensible que celui de l'énoncé, qui fera 123670 kilomètres lors de la fin du défi (plus de trois fois le tour de la terre!).

Piste de réflexion : les plus passionnés d'énigmes d'entre vous pourront reconsidérer le même problème avec la fourmi et le géant qui ne dorment plus, et la fourmi qui parcourt à vitesse constante 1 kilomètre par jour pendant que le géant étire de manière constante l'élastique pour l'allonger de 10 kilomètres chaque jour... La solution est qu'il faut cette fois ci $e^{10} - 1 = 22025$ jours.