ENIGME DES POLYTECHNICIENS

TANCRÈDE LEPOINT

RÉSUMÉ. Une autre énigme proposée par Hugo, qui permet un peu de dénombrement rigolo. Ce qu'il faut connaître ? Hum... les bases du dénombrement, et on peut s'en sortir sans connaître l'équivalent de la série harmonique (mais avec, c'est plus rapide !).

ENIGME

Une promotion de 500 polytechniciens participe à un nouveau jeu télévisé, plutôt cruel. A tour de rôle, ils entrent dans une pièce dans laquelle se trouvent des boîtes fermées, numérotées de 1 à 500, identiques, contenant chacune un papier avec le nom et le prénom d'un des polytechniciens. Chacun leur tour, ils peuvent ouvrir 250 boîtes. Si l'un deux ne trouve pas son nom et prénom après avoir ouvert les 250 boîtes, ils sont tous éliminés.
Bien entendu, ils ne peuvent pas communiquer entre eux pendant le jeu, ni faire un signe quelconque permettant de faire comprendre à leurs compagnons dans quelle boîte est leur prénom, et ils n'ont pas le droit de changer quoi que ce soit dans la pièce (et notamment, ils ne peuvent ni enlever de papier, ni en rajouter, ni les déplacer).
Apparemment, ils semblent avoir une probabilité de $\left(\frac{1}{2}\right)^{500}$ de survie, mais ils se concertent et annoncent qu'ils ont réussi à trouver une stratégie avec une probabilité de survie bien plus élevée. **Comment peuvent-ils procéder ?**

INDICE

En ordonnant les polytechniciens du numéro 1 au numéro 500, et en considérant les permutations de $\{1, \dots, 500\}$, décomposables en cycles, on peut déterminer le nombre de permutations leur permettant de survivre.

Date: Mars 2009.

Solution

Voici une solution. Je ne sais pas si par cette méthode leur chance de survie sont maximisées, mais je suis preneur de toute information, réflexion à ce propos !

Attribuons à chaque polytechnicien un numéro entre 1 et 500. L'application qui à un polytechnicien associe la boîte contenant le papier avec son identité est une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, 500\}$.

Chaque polytechnicien lors de son entrée dans la pièce va aller ouvrir la boîte correspondant à son numéro. Dans cette boîte va se trouver le nom et le prénom d'un polytechnicien, et il ouvrira ensuite la boîte ayant le numéro de ce polytechnicien, et ainsi de suite. Il parcourt ainsi un cycle de la permutation. Il trouvera le papier correspondant à son nom si et seulement si le cycle qu'il parcourt est de longueur ≤ 250.

Comptons le nombre de permutations ayant un cycle de plus de 250 éléments. Pour tout k longueur du cycle, $250 < k \leq 500$, on choisit k polytechniciens parmi les 500, c'est-à-dire on en choisit $\binom{500}{k}$. On choisit l'un des $(k-1)!$ cycles de l'ensemble des polytechniciens choisis, et pour chacun de ces cycles, l'une des $(500-k)!$ permutations quelconques des autres polytechniciens. Leur chance de mourir est de :

$$\frac{1}{500!} \sum_{k=251}^{500} \binom{500}{k} (k-1)!(500-k)!$$

nombre total de permutations de $\{1, \ldots, 500\}$

Ce qui se simplifie en

$$\sum_{k=251}^{500} \frac{1}{k}$$

Si on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, alors leur chance de survie est

$$1 - (H_{500} - H_{250})$$

Or, $H_n \sim_{n \to \infty} \ln(n)$, donc leur chance de survie est $1 - (\ln(500) - \ln(250)) = 1 - \ln(2) = 0,30\ldots$.

Sans faire l'approximation, un logiciel de calcul nous donne que $H_{500} - H_{250} \approx 0,6921481806$. A titre indicatif, $\ln(2) \approx 0,6931471806$; utiliser l'équivalence de H_n est ici justifié.