ENIGME DE LUTINS

TANCRÈDE LEPOINT

Résumé. Un ami normalien m'a posé cette devinette un jour, qui nécessite des connaissances mathématiques du niveau de L3 à peu près. On utilise ici un résultat qui fait encore débat auprès de mathématiciens émérites.

Enigme

On dispose d'une infinité de lutins, que l'on place sur tous les entiers naturels, afin qu'ils regardent vers l'infini.
Sur chacun d'eux, on dispose un chapeau blanc ou un chapeau noir. Ils peuvent ainsi voir les chapeaux de tous les lutins devant eux (ils ont une super vision), mais ne peuvent pas voir le leur et ceux de tous les lutins qui les précèdent.
Après qu'on leur a déposé les chapeaux sur la tête, ils n'ont pas le droit de parler entre eux ni de faire quoi que ce soit pouvant aider les autres lutins à savoir quoi que ce soit.
Chaque lutin doit dire la couleur du chapeau qu'il a sur la tête.
Quelle tactique peuvent-ils adopter avant la mise en place des chapeaux pour qu'il n'y ait qu'un nombre fini de lutins qui se trompent ?

Indice

Comme je le laissais sous-entendre dans le résumé, il faut utiliser l'axiome du choix à des classes d'équivalences (on y choisit un représentant) pour une relation d'équivalence bien choisie.

Date: Mars 2009.

Solution

On peut voir la fonction qui associe à un lutin la couleur de son chapeau comme une fonction

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$$

Si f et f' sont deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$, on définit la relation $\sim$ par

$$f \sim f' \iff \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, f(n) = f'(n)$$

Autrement dit, deux fonction sont en relation si elles prennent les mêmes valeurs à partir d'un certain rang. On voit que ça définit clairement une relation d'équivalence.

Par l'axiome du choix, les lutins choisissent un représentant par classe d'équivalence.

Ainsi, un lutin pouvant voir les chapeaux de tous les lutins devant lui, jusqu'à l'infini, il sait dans quelle classe d'équivalence il se trouve, et peut ainsi énoncer la couleur du chapeau qu'il devrait avoir selon le représentant choisis.

Il n'y aura ainsi qu'un nombre fini d'erreurs.