

*Last night I met upon the stair,
A little man who wasn't there.
He wasn't there again today.
I wish to heck he'd go away.*

Anonymous

NOMBRES DE MERSENNE ET NOMBRES PARFAITS

DEVOIR LIBRE MPSI

0. QUESTIONS PRÉLIMINAIRES

Dans cette étude, nous allons rechercher les nombres premiers de la forme $a^n - 1$ où a et n sont des entiers supérieurs ou égaux à 2.

- 1°) Par un raisonnement simple, montrer que a est nécessairement pair.
- 2°) Énoncer la formule de la somme des séries géométriques, et en déduire que a est égal à 2.
- 3°) On notera pour tout entier naturel $n \geq 2$, $M_n = 2^n - 1$. Calculer M_n pour tous les entiers n compris entre 2 et 7, et dire s'ils sont premiers ou non.
- 4°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si M_n est premier, alors n est nécessairement premier. On pourra raisonner par l'absurde.
- 5°) Que pensez-vous de la réciproque de ce résultat ? Justifier votre réponse.

C'est en 1644, dans la préface de *Cogita Physica-Mathematica* que le moine Marin Mersenne a émis la conjecture (fausse !) suivante :

Les nombres de la forme $2^n - 1$ sont premiers pour $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ et 257 et sont composés (i.e. non premiers) pour tous les autres entiers inférieurs à 257.

Bien que la conjecture de Mersenne soit fausse, c'est son nom qui a été retenu, et les nombres M_n pour $n \geq 2$ sont appelés nombres de Mersenne.

Ce n'est 1883 (!) que Pervouchine a trouvé que le nombre $2^{61} - 1$ était premier et que la conjecture était fausse puisque 61 n'était pas dans la liste.

Au jour d'aujourd'hui, l'avènement de l'informatique a permis de déterminer 46 nombres premiers de Mersenne, le dernier ayant été découvert en septembre 2008. Il est possible de participer à la recherche du plus gros nombre premier¹ en téléchargeant le logiciel de GIMPS² sur le site web :

<http://www.mersenne.org/prime.htm>

1. LES NOMBRES PARFAITS

1.1. Qu'est-ce qu'un nombre parfait ? Les mathématiciens grecs ont observé dès l'Antiquité qu'il y avait une relation entre un nombre et la somme de ses diviseurs (ce qui a souvent provoqué des interprétations mystiques³). Ici, nous nous intéressons à une de ces relations :

Un entier naturel n est dit **nombre parfait** s'il est égal à la somme de tous ses diviseurs positifs, en excluant n lui-même.

Par exemple, $6 = 1 + 2 + 3$ est parfait.

1. Car ils sont obtenus avec les nombres de Mersenne...

2. Great Internet Mersenne Prime Search

3. Mais le sujet n'est pas là ! Pour plus de renseignement, vous pouvez vous renseigner sur Internet.

1°) Trouver un autre nombre parfait plus petit que 30. Dans la suite, on admettra que 496 et 8128 sont parfaits, et que l'on dispose des quatre plus petits nombres parfaits. Vérifier que 31 et 127 divisent respectivement 496 et 8128.

2°) En décomposant les deux nombres parfaits dont vous disposez en produits de nombres premiers, montrer qu'interviennent les nombres premiers de Mersenne.

Cela devrait vous étonner : les nombres de Mersenne semblent intervenir grandement dans les nombres parfaits ! Et voilà, on vient de refaire le raisonnement qu'a tenu Euclide...

3°) Montrer que si p un nombre premier tel que $2^p - 1$ est également premier, alors $2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait.

Le résultat précédent est en fait la proposition 36 du livre IX des *Éléments* d'Euclide.

On peut ainsi trouver de très grands nombres parfaits. Par exemple, pour $p = 17$, $M_p = 131071$ et $2^{16}(2^{17} - 1) = 8589869056$ est parfait !

1.2. Théorème d'Euclide sur les nombres parfaits. Le résultat précédent est intéressant, mais ce qui excitant, c'est que la réciproque est vraie (enfin partiellement) ! Environ 2000 ans après Euclide, c'est Leonhard Euler a montré que la formule d'Euclide donnait tous les nombres parfaits *pairs*.

Théorème (Théorème d'Euclide sur les nombres parfaits). *Si n est un nombre parfait pair, alors*

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

où $2^p - 1$ est un nombre de Mersenne premier.

Afin de prouver ce théorème, il va falloir introduire la fonction σ telle que $\sigma(n)$ soit égal à la somme de tous les diviseurs positifs de n (1 et n inclus).

Définition. Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on définit $\sigma(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d|n}} d$

4°) (a) Que vaut $\sigma(p)$ pour p premier ?

(b) Que vaut $\sigma(p^k)$ pour p premier ?

(c) Que vaut $\sigma(n)$ pour n parfait ?

5°) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n se décompose en facteurs premiers de la façon suivante

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

avec $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, p_i premier et $\alpha_i \in \mathbb{N}$, alors

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^k \left(\frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} \right)$$

(b) En déduire que si m et n sont deux entiers premiers entre eux, alors $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$.

(c) En déduire une autre démonstration de la formule d'Euclide.

6°) Démontrer le théorème d'Euclide.