UN CUBE ET UN PLAN...

TANCRÈDE LEPOINT

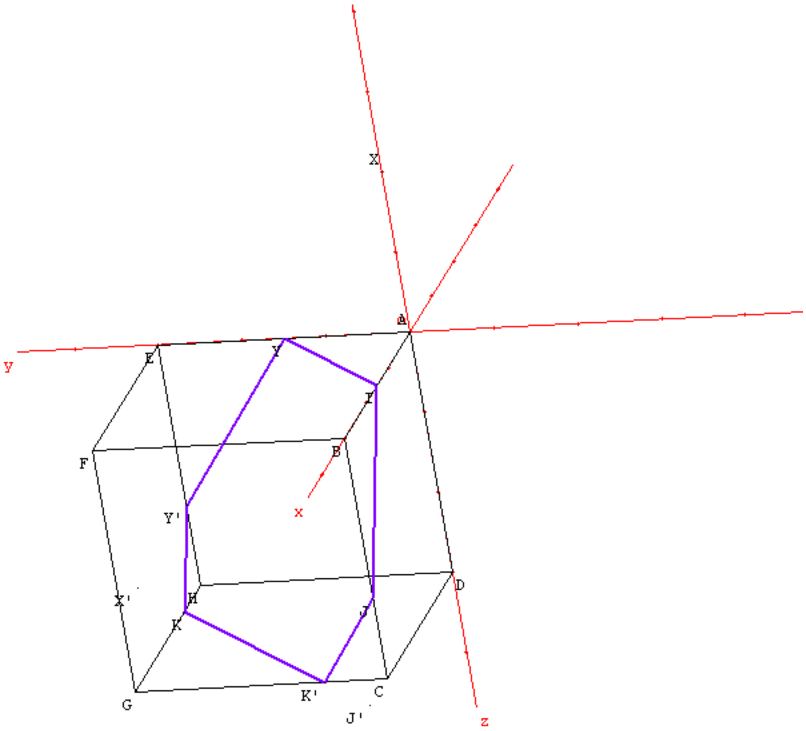
Petite question

Considérons un cube de côté 1. Est-il possible de trouver un plan qui coupe les six faces du cube sans passer par ses sommets (i.e. qui coupe chaque face en une infinité de points) ?

Date: Mai 2009.

Solution

Assez étonnamment, quand je pose cette question, la plupart des gens me répondent "non", même après y avoir réfléchi... Pourtant, il existe une infinité de tels plans... On peut par exemple voir cela sur la figure suivante.



On vérifiera par exemple que le plan $3x + 3y - 4z = 1$ convient. En effet, en intersectant le plan avec :

$$
\begin{array}{llll}
\text{le plan } z = 0 & \text{on trouve} & y = \frac{1}{3} - x & \in [0,1] \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\
\text{le plan } z = 1 & \text{on trouve} & y = \frac{5}{3} - x & \in [0,1] \text{ si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\
\text{le plan } x = 0 & \text{on trouve} & z = \frac{3}{4}y - \frac{1}{4} & \in [0,1] \text{ si } \frac{1}{3} \leq y \leq 1 \\
\text{le plan } x = 1 & \text{on trouve} & z = \frac{3}{4}y + \frac{3}{4} & \in [0,1] \text{ si } 0 \leq y \leq \frac{1}{3} \\
\text{le plan } y = 0 & \text{on trouve} & z = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} & \in [0,1] \text{ si } \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \\
\text{le plan } y = 1 & \text{on trouve} & z = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} & \in [0,1] \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}
\end{array}
$$