

# Baccalauréat S Métropole 23 juin 2009

## Mathématiques

### EXERCICE 1 – 4 points

Commun à tous les candidats

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1) On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $v_n = u_n - 6$ .

- Pour tout nombre entier naturel  $n$ , calculer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ . Quelle est la nature de la suite  $(v_n)$  ?
  - Démontrer que pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $u_n = -5 \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$ .
  - Étudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .
- 2) On considère la suite  $(w_n)$  dont les termes vérifient, pour tout nombre entier  $n \geq 1$  :

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

$w_0$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	$w_8$	$w_9$
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

- Détailler le calcul permettant d'obtenir  $w_{10}$ .
- Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
Donner la nature de la suite  $(w_n)$ . Calculer  $w_{2009}$ .

### EXERCICE 2 – 6 points

Commun à tous les candidats

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \ln(1 + xe^{-x}).$$

On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal. La courbe  $\mathcal{C}$  est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

#### PARTIE I

- Justifier que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
- Justifier que pour tout nombre réel positif  $x$ , le signe de  $f'(x)$  est celui de  $1 - x$ .

3) Étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

## PARTIE II

Soit  $\lambda$  un nombre réel strictement positif. On pose  $\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^\lambda f(x) dx$ . On se propose de majorer  $\mathcal{A}(\lambda)$  à l'aide de deux méthodes différentes.

### 1) Première méthode

- Représenter, sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie), la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à  $\mathcal{A}(\lambda)$ .
- Justifier que pour tout nombre réel  $\lambda$  strictement positif,  $\mathcal{A}(\lambda) \leq \lambda \times f(1)$ .

### 2) Deuxième méthode

- Calculer à l'aide d'une intégration par parties  $\int_0^\lambda xe^{-x} dx$  en fonction de  $\lambda$ .
- On admet que pour tout nombre réel positif  $u$ ,  $\ln(1+u) \leq u$ .  
Démontrer alors que, pour tout nombre réel  $\lambda$  strictement positif,  
 $\mathcal{A}(\lambda) \leq -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$ .

### 3) Application numérique

Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de  $\mathcal{A}(5)$ , arrondi au centième. Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où  $\lambda = 5$  ?

## EXERCICE 3 – 5 points

### Commun à tous les candidats

I. Cette question est une restitution organisée de connaissances.

On rappelle que si  $n$  et  $p$  sont deux nombres entiers naturels tels que  $p \leq n$  alors  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ .

Démontrer que pour tout nombre entier naturel  $n$  et pour tout nombre entier naturel  $p$  tels que  $1 \leq p \leq n$  on a :  $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ .

II. Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.

On tire simultanément deux jetons de ce sac.

- On note A l'évènement « obtenir deux jetons blancs ».  
Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à  $\frac{7}{15}$ .
  - On note B l'évènement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ».  
Calculer la probabilité de B.
  - Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
- Soit  $X$  la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.
  - Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
  - Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .

**EXERCICE 4 – 5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on associe à tout point  $M$  d'affixe  $z$  non nulle, le point  $M'$  milieu du segment  $[MM_1]$  où  $M_1$  est le point d'affixe  $\frac{1}{z}$ .

Le point  $M'$  est appelé l'image du point  $M$ .

- 1) a) Montrer que les distances  $OM$  et  $OM_1$  vérifient la relation  $OM \times OM_1 = 1$  et que les angles  $(\vec{u}; \overrightarrow{OM_1})$  et  $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$  vérifient l'égalité des mesures suivantes  $(\vec{u}; \overrightarrow{OM_1}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$  à  $2\pi$  près.
  - b) Sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point A ap
  - c) La quantité  $\mathcal{A}$  correspond à l'aire comprise entre la courbe représentative de  $f$  et celle de  $g$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 1$ . nt au cercle de centre O et de rayon 2.  
Construire le point A' image du point A. (On laissera apparents les traits de construction).
- 2) a) Justifier que pour tout nombre complexe  $z$  non nul, le point  $M'$  a pour affixe  $z' = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ .
  - b) Soient B et C les points d'affixes respectives  $2i$  et  $-2i$ . Calculer les affixes des points B' et C' images respectives des points B et C.
  - c) Placer les points B, C, B' et C' sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie).
- 3) Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que  $M' = M$ .
- 4) *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que si le point  $M$  appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors son image  $M'$  appartient au segment  $[KL]$  où K et L sont les points d'affixes respectives  $-1$  et  $1$ .

**EXERCICE 4 – 5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

- 1) a) Déterminer l'ensemble des couples  $(x,y)$  de nombres entiers relatifs, solution de l'équation (E) :  $8x - 5y = 3$ .
  - b) Soit  $m$  un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple  $(p, q)$  de nombres entiers vérifiant  $m = 8p + 1$  et  $m = 5q + 4$ .  
Montrer que le couple  $(p, q)$  est solution de l'équation (E) et en déduire que  $m \equiv 9 \pmod{40}$ .
  - c) Déterminer le plus petit de ces nombres entiers  $m$  supérieurs à 2000.
- 2) Soit  $n$  un nombre entier naturel.
  - a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel  $k$  on a :  $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$ .  
Quel est le reste dans la division euclidienne de  $2^{2009}$  par 7?
- 3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec  $a \neq 0$ .

On considère le nombre  $N = a \times 10^3 + b$ . On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme  $N = \overline{a00b}$ .

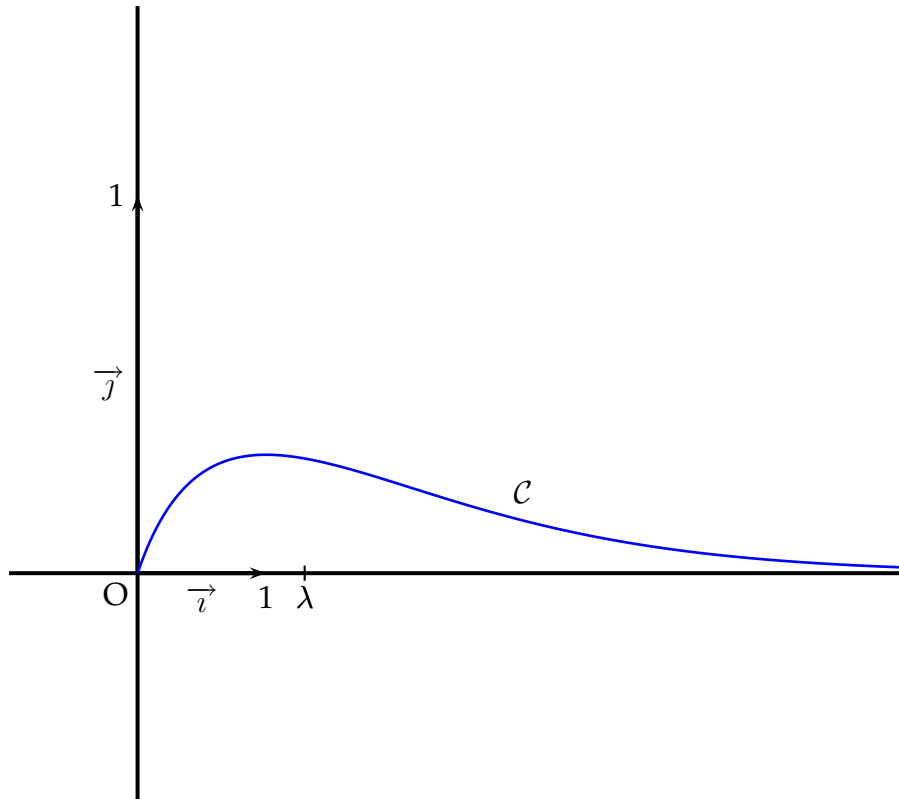
On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels  $N$  ceux qui sont divisibles par 7.

- a) Vérifier que  $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$ .
- b) En déduire tous les nombres entiers  $N$  cherchés.

# ANNEXE 1

## Exercice 2

(À rendre avec la copie)

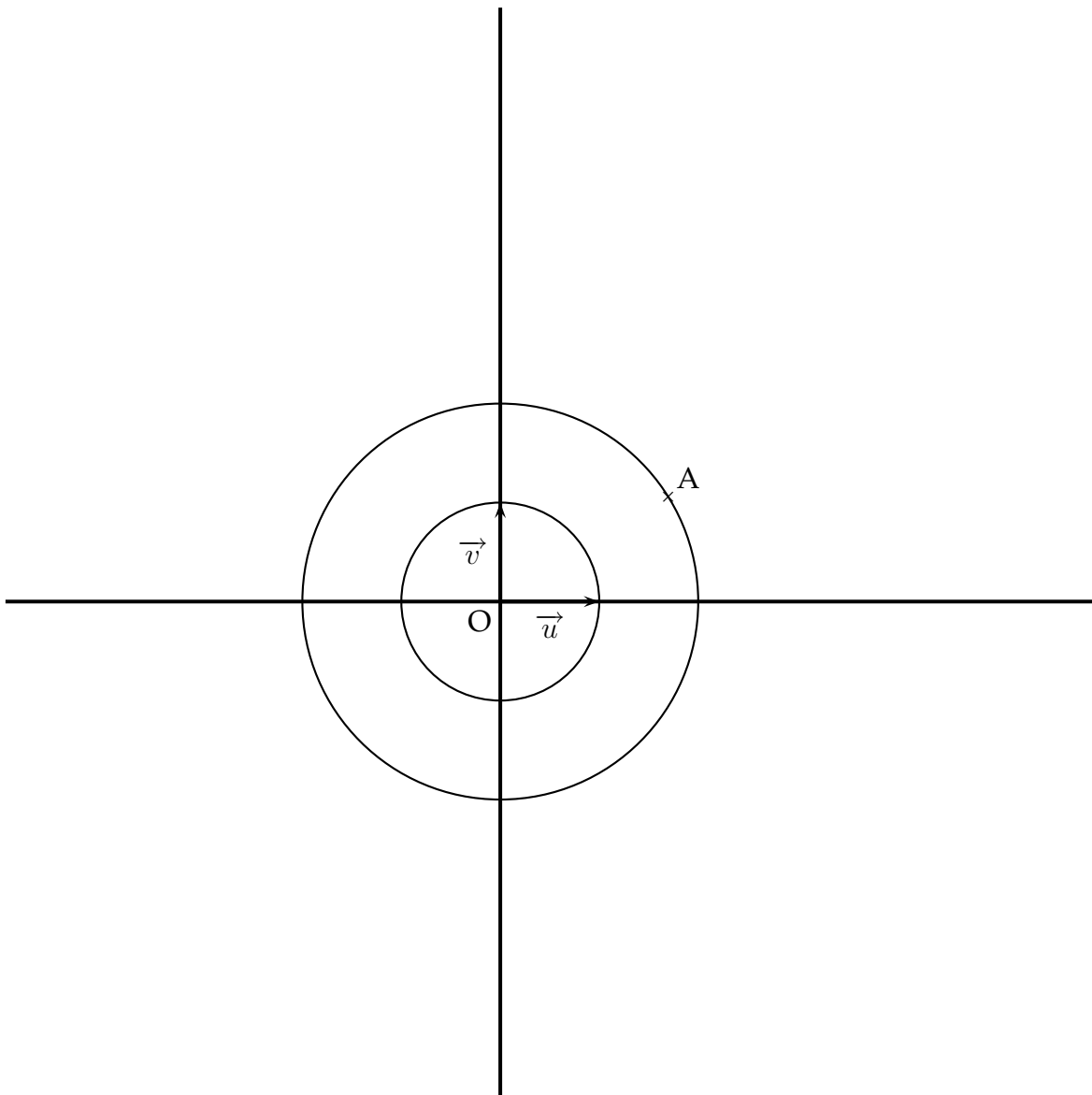


ANNEXE 2

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

(À rendre avec la copie)



# Corrigé du baccalauréat S Métropole 2009

## Mathématiques

Tancrede Lepoint

2009

### Exercice 1

- 1) a) Soit  $n$  un entier naturel. On a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 = \frac{1}{3}(u_n - 6) = \frac{1}{3}v_n$$

Ainsi, la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{3}$ .

- b) On a  $v_0 = u_0 - 6 = -5$ , et on sait que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $v_n = v_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n$ , donc finalement, pour tout nombre entier naturel  $n$ , on a  $u_n = -5 \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$ .
- c) Comme la suite  $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$  est une suite qui tend vers 0 (car  $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ ), alors  $(u_n)$  est une suite convergente et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 6$ .
- 2) a) En appliquant la formule de l'énoncé avec  $n = 10$ , on a

$$10w_{10} = 11w_9 + 1 = 11 \times 19 + 1 = 210$$

On en déduit donc que  $w_{10} = 21$ .

- b) On va montrer par récurrence sur  $n$  entier naturel la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n : "w_n = 2n + 1"$$

**initialisation :** Pour  $n = 0$ , on a  $w_0 = 1 = 2 \times 0 + 1$ .  $\mathcal{P}_0$  est donc vérifiée.

**hérédité :** Supposons la propriété vraie au rang  $n$ . Exprimons  $(n + 1)w_{n+1}$  :

$$(n + 1)w_{n+1} = (n + 2)w_n + 1$$

Par la propriété  $\mathcal{P}_n$ , on en déduit que

$$(n + 1)w_{n+1} = (n + 2)(2n + 1) + 1 = 2n^2 + 5n + 3 = (n + 1)(2n + 3) = (n + 1)(2(n + 1) + 1)$$

En simplifiant par  $(n + 1) \neq 0$  de chaque côté, on obtient  $\mathcal{P}_{n+1}$ .

On a donc montré que pour tout  $n$  entier naturel,  $w_n = 2n + 1$ . Ainsi,  $(w_n)$  diverge vers  $+\infty$  et  $w_{2009} = 2 \times 2009 + 1 = 4019$ .

## Exercice 2

### Partie I

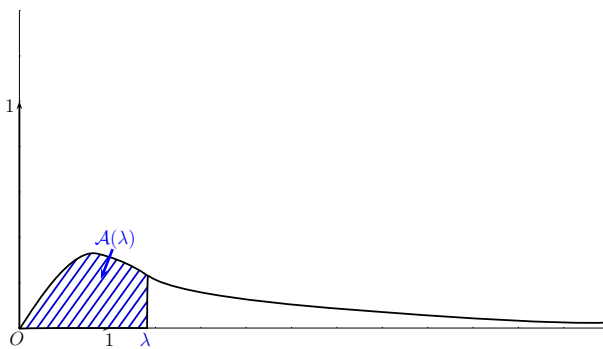
- 1) On sait que  $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ . Par le théorème de sommes des limites, on a donc  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + xe^{-x} = 1$  et par le théorème de composition des limites, on déduit que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ln(1) = 0$ .
- 2) On remarque que  $f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  (comme composée de fonctions dérivables sur cet intervalle). Posons la fonction  $g$  sur  $[0, +\infty[$  définie par  $g(x) = 1 + xe^{-x}$ .  $g$  est dérivable sur son intervalle de définition et  $g'(x) = e^{-x} + x(-1)e^{-x} = e^{-x}(1 - x)$  pour tout nombre réel positif  $x$ . Comme  $f = \ln \circ g$  et que  $g(x) > 0$  pour tout réel positif  $x$ , par la formule de dérivation des fonctions composées, on a  $f'(x) = g'(x) \times \frac{1}{g(x)}$  pour tout nombre réel  $x$  positif.  
Pour tout réel positif  $x$ , on a donc  $f'(x) \geq 0$  si et seulement si  $g'(x) \geq 0$ . Or,  $e^{-x} \geq 0$ , donc  $g'(x) \geq 0$  si et seulement si  $(1 - x) \geq 0$ . On en déduit donc que le signe de  $f'(x)$  est celui de  $(1 - x)$ .
- 3) On a  $(1 - x) = 0$  si et seulement si  $x = 1$ . On peut alors donner le tableau de variation de  $f$  :

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	- 0
$f(x)$	0	$\nearrow$ $\ln(1 + e^{-1})$ $\searrow$	0

### Partie II

#### 1) Première méthode.

- a) La quantité  $\mathcal{A}(\lambda)$  correspond à l'aire comprise entre la courbe représentative de  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \lambda$ .



- b) La dérivée de  $f$  a le même signe que  $(1 - x)$ , donc s'annule et change de signe en  $x = 1$ . On en déduit que  $f$  admet un maximum en 1 et, pour tout réel positif  $x$ ,  $f(x) \leq f(1)$ . Ainsi,

$$\int_0^\lambda f(x) dx \leq \int_0^\lambda f(1) dx = \lambda f(1)$$

D'où  $\mathcal{A}(\lambda) \leq \lambda f(1)$ .

#### 2) Deuxième méthode.

- a) On pose  $u(x) = -e^{-x}$  et  $v(x) = x$ . On a donc  $u'(x) = e^{-x}$  et  $v'(x) = 1$  pour tout réel positif  $x$ . Par la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_0^\lambda xe^{-x} dx &= \int_0^\lambda u'(x)v(x) \\
 &= [u(x)v(x)]_0^\lambda - \int_0^\lambda u(x)v'(x) dx \\
 &= [-xe^{-x}]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{-x} dx \\
 &= -\lambda e^{-\lambda} + [-e^{-x}]_0^\lambda \\
 &= (-\lambda - 1)e^{-\lambda} + 1
 \end{aligned}$$

b) Soit un nombre réel positif  $\lambda$ . Pour tout nombre réel positif  $x \leq \lambda$ , on a  $xe^{-x} \geq 0$ . Du coup, on peut appliquer la formule de l'énoncé et pour tout nombre réel positif  $x \leq \lambda$ ,  $\ln(1 + xe^{-x}) \leq xe^{-x}$ . On intègre selon  $x$  entre 0 et  $\lambda$  et on obtient

$$\mathcal{A}(\lambda) \leq \int_0^\lambda xe^{-x} dx = (-\lambda - 1)e^{-\lambda} + 1$$

et c'est le résultat voulu.

3) **Application numérique.** On a  $f(1) = \frac{1}{e}$ . Pour  $\lambda = 5$ , la première méthode donne  $\mathcal{A}(5) \leq \frac{5}{e} \leq 1,84$  alors que la seconde méthode donne  $\mathcal{A}(5) \leq -6e^{-5} + 1 \leq 0,96$ . La seconde méthode est clairement plus efficace ! En effet, la première méthode donne une majoration grossière de la fonction  $f$  alors que la seconde tente de s'en rapprocher d'avantage.

## Exercice 3

### I. Restitution organisée de connaissances

Soient  $n$  et  $p$  deux nombres entiers naturels tels que  $1 \leq p \leq n$ . On a

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(n-1-(p-1))!(p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!p!}$$

On réduit au même dénominateur, à savoir  $(n-p)!p!$  :

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{p(n-1)!}{(n-p)!p!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)!p!} \\ &= \frac{(n-1)!(n-p+p)}{(n-p)!p!} \\ &= \binom{n}{p} \end{aligned}$$

### II. Probabilités

1) a) Pour réaliser l'événement  $A$ , il faut prendre deux jetons parmi les 7 jetons blancs, c'est-à-dire que l'on a  $\binom{7}{2}$  façons de le faire. La probabilité  $p(A)$  que cela arrive est de  $\frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}}$  sur le nombre des tirages possibles, c'est-à-dire  $\binom{10}{2}$ . On a

$$p(A) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}$$

b) Parmi les 10 jetons, il y en a 6 qui ont des numéros impairs (4 blancs et 2 noirs). Pour réaliser l'événement  $B$ , il faut prendre deux jetons parmi ces 6 jetons, c'est-à-dire que l'on a  $\binom{6}{2}$  façons de le faire. La probabilité  $p(B)$  que cela arrive est de  $\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}$  sur le nombre des tirages possibles, c'est-à-dire  $\binom{10}{2}$ . On a

$$p(B) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{3}$$

c) Calculons  $p(A \cap B)$ . On veut prendre deux jetons blancs avec un numéro impair : il faut prendre deux jetons parmi les 4 possibles, c'est-à-dire que l'on a  $\binom{4}{2}$  façons de le faire. La

probabilité  $p(A \cap B)$  que cela arrive est de  $\binom{4}{2}$  sur le nombre des tirages possibles, c'est-à-dire  $\binom{10}{2}$ . On a

$$p(A \cap B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{15} \neq p(A)p(B)$$

Les événements  $A$  et  $B$  ne sont pas indépendants.

- 2) a) On tire deux jetons simultanément parmi dix jetons, et l'on sait qu'il y en a 7 de blancs. La loi de probabilité de  $X$  est donnée ici par :

Nombre de jetons blancs tirés	0	1	2
Probabilité	$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15}$	$\frac{\binom{3}{1}\binom{7}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

Détaillons le cas où l'on tire un seul jeton blanc (le dernier cas à traiter se fait comme le 1)a)). Pour tirer un seule jeton blanc, il faut choisir un jeton parmi les 7 blancs **et** un jeton parmi les 3 noirs. Il y a donc  $\binom{7}{1} \times \binom{3}{1}$  tirages satisfaisant cela. Pour avoir la probabilité, on divise par le nombre de tirages possibles.

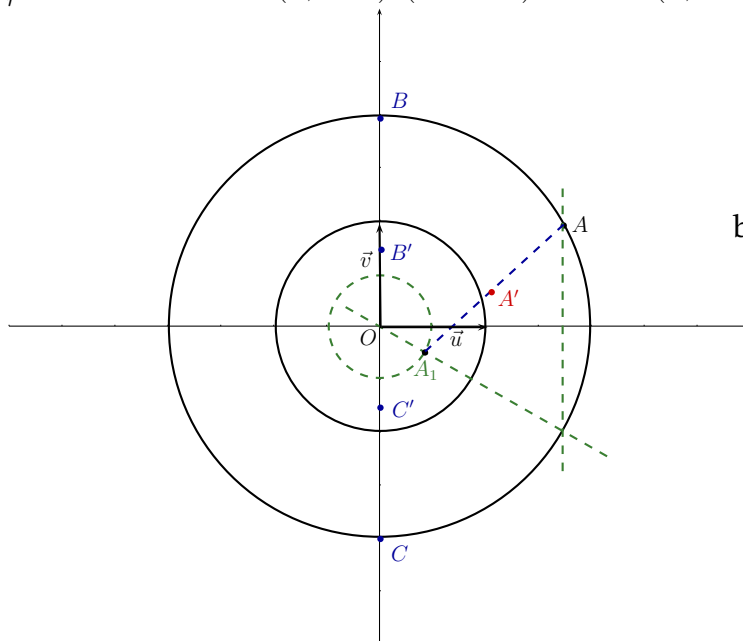
- b) L'espérance mathématiques de la variable aléatoire  $X$  est  $E(X) = \sum_{i=1}^3 p_i x_i$  où  $x_1, x_2$  et  $x_3$  désignent respectivement le nombre de jetons blancs tirés et  $p_1, p_2, p_3$  les probabilités associées. On a donc

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{7}{15} = \frac{7}{5}$$

## Exercice 4 : Obligatoire

- 1) a) Comme  $O$  est d'affixe 0, on a  $OM = |z - 0| = |z|$  et  $OM_1 = \left| \frac{1}{z} - 0 \right| = \frac{1}{|z|}$  (car  $z \neq 0$ ). Ainsi,  $OM \times OM_1 = 1$ .

Si on écrit  $z = re^{i\theta}$  sous forme trigonométrique, alors  $z_1$  l'affixe de  $M_1$  est  $z_1 = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ . Or,  $\theta \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \pmod{2\pi}$ , donc  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) \equiv -\theta \equiv -(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \pmod{2\pi}$ .



- b) On commence par tracer le cercle de rayon  $\frac{1}{2}$  (le point  $A_1$  s'y trouvera). On trace ensuite le symétrique de  $A$  par rapport à l'axe des abscisses, puis on relie le point obtenu à l'origine pour avoir l'égalité des angles voulue.

- 2) a) Soit  $z$  un nombre complexe non nul, affixe du point  $M$ . Le point  $M_1$  a pour affixe  $\frac{1}{z}$ . Le milieu de  $[M, M_1]$ , noté  $M'$  a donc pour affixe  $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ .
- b) L'affixe de  $B'$  est  $\frac{1}{2}(2i + \frac{1}{2i}) = \frac{3}{4}i$  et l'affixe de  $C'$  est  $\frac{1}{2}(-2i + \frac{1}{-2i}) = -\frac{3}{4}i$ .

- 3) On cherche l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  non nulle tels que  $M' = M$ , c'est-à-dire  $z = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ , ce qui équivaut à  $z^2 = 1$ , c'est-à-dire  $z = 1$  ou  $z = -1$ .
- 4) Si  $M$  est sur le cercle de centre  $O$  et de rayon 1, alors le point  $M_1$  est aussi sur le cercle unité, et l'information sur les angles nous dit que c'est le symétrique du point par rapport à la droite des abscisses (autrement dit, on a l'équivalence entre  $|z| = 1$  et  $\frac{1}{z} = \bar{z}$  le conjugué de  $z$ ). Ainsi, leur milieu est sur l'axe des abscisses, donc d'affixe réelle. De plus, l'inégalité triangulaire donne  $|z'| = \frac{1}{2}|z + \frac{1}{z}| \leq \frac{1}{2}|z| + \frac{1}{2}|\frac{1}{z}| = 1$ , donc  $M'$  est sur le segment  $[KL]$ .

## Exercice 4 : Spécialité

- 1) a) On sait que  $\text{pgcd}(5, 8) = 1$ . Trouvons un couple de Bézout  $(u, v)$  solution de  $8u + 5v = 1$ . On voit que  $(2, -3)$  convient. Ainsi, on a

$$8x - 5y = 3 = 3 \times (8 \times 2 - 3 \times 5) = 8 \times 6 - 9 \times 5$$

On regroupe les facteurs de 8 d'un côté et ceux de 5 de l'autre

$$8(x - 6) = 5(y - 9) \quad (E')$$

On a donc  $8 \mid 5(y - 9)$  or  $\text{pgcd}(5, 8) = 1$  donc par le lemme de Gauss,  $8 \mid y - 9$  donc il existe un entier relatif  $k$  tel que  $y = 9 + 8k$ . De même, comme  $5 \mid 8(x - 6)$ , alors  $5 \mid x - 6$  et il existe un entier relatif  $k'$  tel que  $x = 6 + 5k'$ . En remplaçant dans  $(E')$ , on trouve  $k = k'$ .

Les solutions de  $(E)$  sont donc les couples  $(5k + 6, 8k + 9)$  où  $k$  est un entier relatif.

*N.B : Ceci suit la méthode traditionnelle. Ici pour gagner un poil de temps (et que ce soit plus joli), on pouvait remarquer que le couple  $(1, 1)$  vérifiait  $(E)$  et finir de la même façon pour trouver que les solutions de  $(E)$  sont les couples  $(5\ell + 1, 8\ell + 9)$  avec  $\ell$  un nombre entier relatif.*

- b) On a  $8p - 5q = m - 1 - (m - 4) = 3$  donc  $(p, q)$  est solution de  $(E)$ . Ainsi, il existe  $k$  un entier relatif tel que  $p = 5k + 6$ . Ainsi,  $m = 40k + 49$ . Comme  $49 \equiv 9 \pmod{40}$  et  $40k \equiv 0 \pmod{40}$  alors  $m \equiv 9 \pmod{40}$ .
- c) Comme  $m \equiv 9 \pmod{40}$ , le plus petit nombre susceptible de convenir au dessus de 2000 est 2009. Or,  $2009 = 8 \times 251 + 1 = 5 \times 401 + 4$ , et le couple  $(251, 401)$  est solution de  $(E)$  (on a  $k = 49\dots$ ). Ainsi,  $m = 2009$  est le plus petit nombre au-dessus de 2000 qui convient.
- 2) a) Soit  $k$  un entier naturel. On a  $2^3 = 8$  et  $8 \equiv 1 \pmod{7}$ . Ainsi,  $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ . On élève le tout à la puissance  $k$  et on obtient  $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$ , et c'est ce que l'on voulait.
- b) Effectuons la division euclidienne de 2009 par 3 :  $2009 = 3 \times 669 + 2$ . Ainsi, comme  $2^{2009} = 2^{3 \times 669} 2^2$ , on a  $2^{2009} \equiv 4 \pmod{7}$ .
- 3) a) On a  $10 \equiv 3 \pmod{7}$ , donc  $10^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 2 \pmod{7}$  et  $10^3 \equiv 2 \times 3 \equiv -1 \pmod{7}$ .
- b) On en déduit que  $a \times 10^3 \equiv -a \pmod{7}$ , d'où  $N \equiv b - a \pmod{7}$ . On cherche tous les couples  $(a, b)$  tels que  $b - a$  est un multiple de 7 et  $a \neq 0$ . Comme  $a$  et  $b$  sont positifs et inférieurs à 9, alors  $-9 < b - a < 9$ , donc  $b - a = -7, 0$  ou  $7$ . Le cas  $b - a = 0$  donne  $a = b \neq 0$  et respectivement tous ces couples fonctionnent. Le cas  $b - a = 7$  n'est possible que si  $(a = 1$  et  $b = 8)$  ou si  $(a = 2$  et  $b = 9)$  sinon  $b$  devient plus grand que 10. De même, le cas  $b - a = -7$  donne  $a = 7, b = 0, a = 8, b = 1$  et  $a = 9, b = 2$ .

Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\{1001, 1008, 2002, 2009, 3003, 4004, 5005, 6006, 7000, 7007, 8001, 8008, 9002, 9009\}$$