Baccalauréat S La Réunion 23 juin 2009
Mathématiques

EXERCICE 1 – *4 points*
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $z = 1 - 2i + \mathrm{e}^{i\theta}$, θ étant un nombre réel.
   a) $\mathcal{E}$ est une droite passant par le point d'affixe $2 - 2i$.
   b) $\mathcal{E}$ est le cercle de centre d'affixe $-1 + 2i$ et de rayon 1.
   c) $\mathcal{E}$ est le cercle de centre d'affixe $1 - 2i$ et de rayon 1.
   d) $\mathcal{E}$ est le cercle de centre d'affixe $1 - 2i$ et de rayon $\sqrt{5}$.
2) Soit f l'application du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -iz - 2i$.
   a) f est une homothétie.
   b) Le point d'affixe $-1 - 2i$ est un antécédent du point d'affixe i.
   c) f est la rotation de centre le point d'affixe $1 + i$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   d) f est la rotation de centre le point d'affixe $-1 - i$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
3) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 1 + i| = |z + 1 + 2i|$.
   Soient les points A, B et C d' affixes respectives $1 - i, -1 + 2i$ et $-1 - 2i$.
   a) C est un point de $\mathcal{F}$.
   b) $\mathcal{F}$ est la médiatrice du segment [AB].
   c) $\mathcal{F}$ est la médiatrice du segment [AC].
   d) $\mathcal{F}$ est le cercle de diamètre [AB].
4) On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z + |z|^2 = 7 + i$. Cette équation admet :
   a) Deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 1.
   b) Une solution réelle.
   c) Deux solutions dont une seule a pour partie imaginaire 1.
   d) Une solution qui a pour partie imaginaire 2.

EXERCICE 2 – *6 points*
Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = xe^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2e^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est donnée en annexe (à rendre avec la copie).

1) D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction f et sa limite en $+\infty$?
2) Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.
3) Tracer sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie) la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction g.
4) Quelle semble être la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$?
   Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

Partie B

L'objectif de cette partie est de calculer, en unités d'aire, la mesure de l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

1) Hachurer sur l'annexe cette partie du plan.
2) Soit $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Démontrer que $I = 1 - \dfrac{2}{e}$.
3) *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit H la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$H(x) = -\left(x^2 + 2x\right)e^{-x}.$$

   a) Calculer la dérivée H' de la fonction H.
   b) En déduire une primitive sur l'intervalle $[0, +\infty[$ de la fonction g.
4) Déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$.

EXERCICE 3 – *5 points*
Commun à tous les candidats

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1) Dans cette question les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.
   On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.
   On note A l' événement « le sac présente le défaut a » et B l'événement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des événements A et B sont respectivement $p(A) = 0,02$ et $p(B) = 0,01$; on suppose que ces deux événements sont indépendants.

a) Calculer la probabilité de l'événement C « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».

b) Calculer la probabilité de l'événement D « le sac est défectueux ».

c) Calculer la probabilité de l'événement E « le sac ne présente aucun défaut ».

d) Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?

2) On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à $0,03$. On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Quelle est la probabilité de l'événement « au moins un sac est défectueux » ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.

c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

EXERCICE 4 – *5 points*
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soient $A(1,2,0)$, $B(2,2,0)$, $C(1,3,0)$ et $D(1,2,1)$ quatre points de l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
$\mathcal{P}$ désigne le plan orthogonal à (BC) contenant A ;
$\mathcal{Q}$ désigne le plan orthogonal à (DC) contenant A ;
$\mathcal{R}$ désigne le plan orthogonal à (BD) contenant A.

1) Montrer que le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x - y + 1 = 0$.
On admet que le plan $\mathcal{Q}$ a pour équation cartésienne $-y + z + 2 = 0$ et que le plan $\mathcal{R}$ a pour équation cartésienne $-x + z + 1 = 0$.

2) a) Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x - y + 1 &=& 0 \\ -y + z + 2 &=& 0 \\ -x + z + 1 &=& 0 \end{array}\right.$

b) En déduire que l'intersection des trois plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ est une droite (d) passant par le point $E(2,3,1)$.

c) Vérifier que la droite (d) est orthogonale au plan (BCD).
En déduire une équation cartésienne du plan (BCD).

3) Déterminer une équation cartésienne pour chacun des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

On admet que ces plans sont respectivement parallèles aux plans de repères $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $\left(O, \vec{\imath}, \vec{k}\right)$ *et* $\left(O, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

a) Montrer que tout point M de la droite (d) est équidistant des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

b) Existe-t-il des points de l'espace équidistants des plans (ABC), (ABD), (ACD) et (BCD) ?

EXERCICE 4 – *5 points*
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1) Soient F le point de coordonnées $\left(0, 0, \dfrac{1}{4}\right)$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $z = -\dfrac{1}{4}$.

   On note $d(M, \mathcal{P})$ la distance d'un point M au plan $\mathcal{P}$.
   Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des points M de coordonnées (x, y, z) qui vérifient $d(M, \mathcal{P}) = MF$ a pour équation $x^2 + y^2 = z$.

2)
   a) Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble $\mathcal{S}$ avec le plan d'équation $z = 2$?
   b) Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble $\mathcal{S}$ avec le plan d'équation $x = 0$?
   Représenter cette intersection dans le repère $\left(O, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

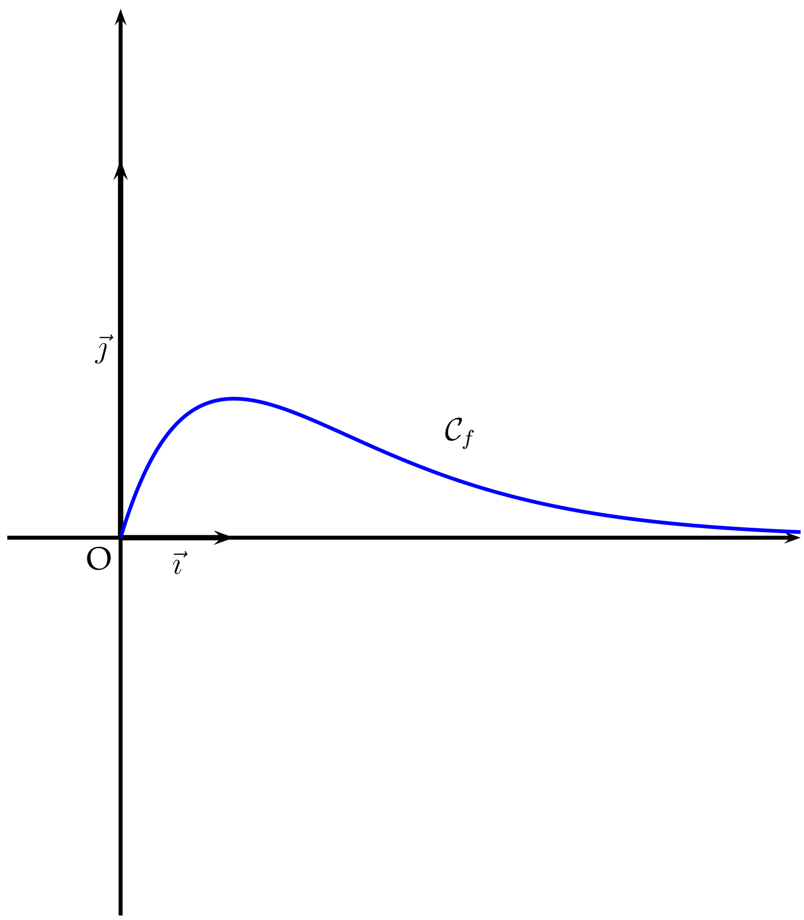
3) Dans cette question, x et y désignent des nombres entiers naturels.
   a) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7 ?
   b) Démontrer que 7 divise $x^2 + y^2$ si et seulement si 7 divise x et 7 divise y.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Existe-t-il des points qui appartiennent à l'intersection de l'ensemble $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $z = 98$ et dont toutes les coordonnées sont des entiers naturels ? Si oui les déterminer.

ANNEXE Exercice 2

À rendre avec la copie



Corrigé du baccaulauréat S La Réunion 2009
Mathématiques

Tancrède Lepoint

2009

Exercice 1

Il n'était pas nécessaire de justifier, mais je vais expliquer mes réponses pour que vous compreniez d'où cela vient.

1) L'équation $z = e^{i\theta}$, θ étant un nombre réel est l'équation du cercle trigonométrique. Ici, on a rajouté $1-2i$, c'est-à-dire qu'on a translaté le cercle. La bonne réponse est donc $\boxed{\text{c}}$.
2) Il est évident que f n'est pas une homothétie, sinon on aurait $z' = kz$ avec k le rapport de l'homothétie. Si l'on calcule $f(-1-2i)$, on trouve $f(-1-2i) = -i(-1-2i) - 2i = -2-i$. Le centre d'une rotation est invariant, or $f(1+i) = 1-3i$. Finalement, il ne reste que la réponse $\boxed{\text{d}}$.
3) On note z_A, z_B et z_C les abscisses respectives des points A, B et C. Comme $|z_C + 1 + 2i| = |0| = 0$ et $|z_C - 1 - i| = |-2-i| \neq 0$ alors $C \notin \mathcal{F}$. De la même façon, on voit que $z_A \notin \mathcal{F}$ donc $\mathcal{F}$ ne peut pas être le cercle de diamètre $[AB]$. Si I est le milieu de $[AB]$, alors son affixe vaut $z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{i}{2}$. Comme $|z_I - 1 + i| = \left|-1 + \frac{3}{2}i\right|$ et $|z_I + 1 + 2i| = \left|1 + \frac{5}{2}i\right|$ et que ces deux modules ne sont pas égaux, le point I n'est pas dans $\mathcal{F}$ donc $\mathcal{F}$ ne peut pas être la médiatrice de $[AB]$. Reste une seule possibilité, la réponse $\boxed{\text{c}}$.
4) Si on remarque l'équation sous la forme $z = (7 + |z|^2) + i$, et comme $(7 + |z|^2) \in \mathbb{R}$ pour tout nombre complexe z, on peut éliminer directement les réponses b, c et d car si z est solution, elle a forcément une partie imaginaire égale à 1. Reste la réponse $\boxed{\text{a}}$.

Exercice 2

Partie A

1) La fonction f semble croître, puis décroître et tendre vers 0 en $+\infty$.
2) On sait que $\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$. Par le théorème de sommes des limites, on a donc $\lim_{x\to\infty} 1 + xe^{-x} = 1$ et par le théorème de composition des limites, on déduit que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ln(1) = 0$.

   On remarque que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ (comme composée de fonctions dérivables sur cet intervalle). Posons la fonction g sur $[0, +\infty[$ définie par $g(x) = 1 + xe^{-x}$. g est dérivable sur son intervalle de définition et $g'(x) = e^{-x} + x(-1)e^{-x} = e^{-x}(1-x)$ pour tout nombre réel positif x.

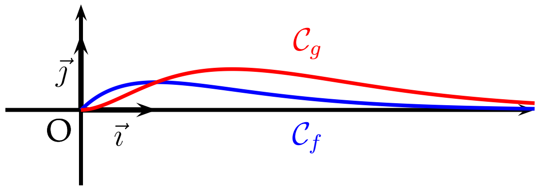
   Comme $f = \ln \circ g$ et que $g(x) > 0$ pour tout réel positif x, par la formule de dérivation des fonctions composées, on a $f'(x) = g'(x) \times \frac{1}{g(x)}$ pour tout nombre réel x positif.

   Pour tout réel positif x, on a donc $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $g'(x) \geq 0$. Or, $e^{-x} \geq 0$, donc $g'(x) \geq 0$ si et seulement si $(1-x) \geq 0$. On en déduit donc que le signe de $f'(x)$ est celui de $(1-x)$.

On a $(1-x)=0$ si et seulement si $x=1$. On peut alors donner le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln\left(1+e^{-1}\right)$	$\searrow$	0

3) On place quelques points (d'abscisses respectives $0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1; 1,2; 2; 3; 4; 5$) et on obtient le graphique suivant :



4) On conjecture graphiquement que la courbe $\mathcal{C}_f$ semble être au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ sur $[0,1]$ et en-dessous sur $[1,+\infty[$. Vérifions cela.
On pose la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x)=f(x)-g(x)=e^{-x}\left(x-x^2\right)$. Cherchons les $x\in[0,+\infty[$ tels que $h(x)\geq 0$. Soit $x\in[0,+\infty[$. On a

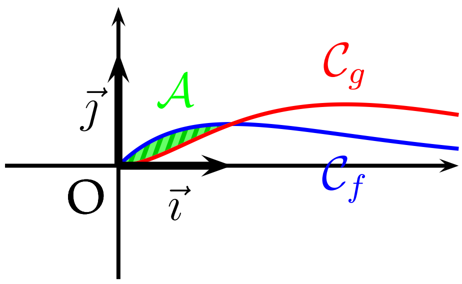
$$h(x)\geq 0 \iff e^{-x}(x-x^2)\geq 0 \iff x-x^2\geq 0 \quad (\text{car } e^{-x}>0 \text{ pour tout réel } x)$$

Or l'équation du second degré $x-x^2$ admet pour solutions 0 et 1, et est positive sur $[0,1]$, négative ailleurs. Donc

$$h(x)\geq 0 \iff x\in[0,1]$$

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ sur $[0,1]$ et en-dessous sur $[1,+\infty[$.

Partie B



1) La quantité $\mathcal{A}$ correspond à l'aire comprise entre la courbe représentative de f et celle de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

2) On pose $u(x)=-e^{-x}$ et $v(x)=x$. On a donc $u'(x)=e^{-x}$ et $v'(x)=1$ pour tout réel positif x. Par la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} I=\int_0^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 u'(x)v(x) \\ &= [u(x)v(x)]_0^1-\int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-xe^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{e}+\left[-e^{-x}\right]_0^1 \\ &= -\frac{2}{e}+1 \end{aligned}$$

3) a) H' est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Ainsi, pour tout x dans $[0,+\infty[$, on a :

$$H'(x) = -(2x+2)e^{-x} + (x^2+2x)e^{-x} = e^{-x}\left(x^2-2\right)$$

b) On remarque que $H'(x) = g(x) - 2e^{-x}$ pour tout nombre réel x dans $[0,+\infty[$. Ainsi, si on pose G la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $G(x) = H(x) - 2e^{-x}$, on sait que G est dérivable sur son intervalle de définition et pour tout x dans $[0,+\infty[$, on a :

$$G'(x) = H'(x) + 2e^{-x} = g(x)$$

On en déduit que G est une primitive de g.

4) L'aire $\mathcal{A}$ vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= I - [G(x)]_0^1 \\ &= 1 - \frac{2}{e} - \left(-\frac{5}{e} + 2\right) \\ &= -1 + \frac{3}{e}\end{aligned}$$

Et cette quantité est bien positive, c'est rassurant !

Exercice 3

1) a) On a $C = A \cap B$, et comme les événements A et B sont indépendants, on obtient

$$p(C) = p(A\cap B) = p(A)\times p(B) = \frac{2}{100}\times\frac{1}{100} = \frac{2}{10000} = \frac{1}{5000} = 0,0002$$

b) Le sac est défectueux si il présente au moins l'un des défauts. a ou b. On a donc $D = A\cup B$. Ainsi,

$$p(D) = p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = \frac{2}{100} + \frac{1}{100} - \frac{1}{5000} = \frac{149}{5000} = 0,0298$$

c) Le sac ne présente aucun défaut est le contraire de l'événement D, c'est-à-dire $E = \overline{D}$, donc

$$p(E) = 1 - p(D) = \frac{4851}{5000} = 0,9702$$

d) Comme les événements A et B sont indépendants, la probabilité de B sachant A est la même que la probabilité de B, c'est-à-dire

$$p_A(B) = 0,01$$

2) a) Tirer un sac est une épreuve comportant deux issues A et B (A si le sac a un défaut, B sinon). La probabilité de A est $p = 0,03$. On répète 100 dois de manière indépendante l'épreuve et on note X la variable aléatoire égale au nombre de sacs défectueux. (X est à valeurs dans $\{0,\ldots,100\}$.) Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètre 100 et $0,03$.

b) Pour tout $k\in\{0,\ldots,100\}$, on a $p(X=k) = \binom{n}{k}0,03^k(1-0,03)^{100-k}$. La probabilité qu'aucun sac ne soit défectueux est donc $p(X=0) = (1-0,03)^{100} \approx 0,05$. Ainsi, la probabilité qu'au moins 1 sac soit défectueux est $1 - p(X=0) \approx 0,95$. Il y a donc 95% de chance que sur 100 tirages, on ait un sac défectueux.

c) Comme X suit une loi binomiale, on a $E(X) = 100\times 0,03 = 3$. Sur un tirage de 100 sacs, on est susceptible d'avoir 3 sacs défectueux.

Exercice 4 : Obligatoire

1) On a $\overrightarrow{BC}$ qui a comme coordonnées $(-1, 1, 0)$. Le plan $\mathcal{P}$ est le plan de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$, donc a une équation de la forme $-1 \times x + 1 \times y + 0 \times z + d = 0$. Le plan $\mathcal{P}$ contient le point A, donc on trouve que $-1 + 2 + d = 0$, c'est-à-dire $d = -1$. Finalement, en multipliant par -1, l'équation de $\mathcal{P}$ est $x - y + 1 = 0$.

2) a) Résolvons le système par la méthode de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & -y & & +1 & = & 0 \\ & -y & +z & +2 & = & 0 \\ -x & & +z & +1 & = & 0 \end{array}\right. \overset{L_3 \leftarrow L_1 + L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{cccccc} x & -y & & +1 & = & 0 \\ & -y & +z & +2 & = & 0 \\ & -y & +z & +2 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \text{ et } L_3 \text{ sont identiques}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{cccccc} x & -y & & +1 & = & 0 \\ & -y & +z & +2 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccl} x & = & t-1 \\ y & = & t \\ z & = & t-2 \end{array}\right. \text{ de paramètre } t \in \mathbb{R}$$

b) Soit M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z). On a

$$M \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \cap \mathcal{R} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} x & -y & & +1 & = & 0 \\ & -y & +z & +2 & = & 0 \\ -x & & +z & +1 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccl} x & = & t-1 \\ y & = & t \\ z & = & t-2 \end{array}\right. \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

Ainsi, l'ensemble des points d'intersection des trois plans est une droite (d) dont l'équation paramétrée est $\left\{\begin{array}{ccl} x & = & t-1 \\ y & = & t \\ z & = & t-2 \end{array}\right.$ de paramètre $t \in \mathbb{R}$. On vérifie facilement pour $t = 2$ que $E \in (d)$.

c) Un vecteur directeur de (d) est donné par l'équation paramétrée : $\vec{u}$ de coordonnées $(1, 1, 1)$ convient. On va montrer que les produits scalaires de $\vec{u}$ avec $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont nuls. On a :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \times -1 + 1 \times 1 + 1 \times 0 = 0$$

et

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 \times -1 + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0$$

On a donc montré que le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$, donc (d) est orthogonale au plan (BCD).
Une équation cartésienne du plan (BCD) est donc $x + y + z + d = 0$. Comme $B \in (BCD)$, alors $2 + 2 + 0 + d = 0$, donc $d = -4$. Ainsi, le plan (BCD) a pour équation cartésienne $x + y + z - 4 = 0$.

3) Les points A, B et C sont distincts et leur troisième coordonnée est nulle. Ils appartiennent donc au plan d'équation cartésienne $z = 0$, qui est le plan recherché.
Les points A, B et D sont distincts et leur deuxième coordonnée vaut 2. Ils appartiennent donc au plan d'équation cartésienne $y - 2 = 0$, qui est le plan recherché.
Les points A, C et D sont distincts et leur première coordonnée vaut 1. Ils appartiennent donc au plan d'équation cartésienne $x - 1 = 0$, qui est le plan recherché.

4) a) Soit M un point de la droite (d) de coordonnées (x, y, z). Il existe donc un réel t tel que $x = t - 1$, $y = t$ et $z = t - 2$. On a donc

$$d(M, (ABC)) = \frac{|z|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = |t - 2|$$

$$d(M,(ABD)) = \frac{|y-2|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = |t-2|$$
$$d(M,(ACD)) = \frac{|x-1|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = |t-2|$$

Ainsi, les points de la droite (d) sont équidistants des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

b) *Malheureusement, la réciproque du point précédent n'est pas vraie... Il existe des points équidistants aux trois plans qui ne sont pas sur la droite (d). Néanmoins, et même si ce n'est pas indiqué de trouver tous les points équidistants entre les quatre plan (ce qui nécessite un système de trois équations à trois inconnues avec des valeurs absolues, ce qui n'est **absolument pas au programme**) mais de voir qu'il en existe au moins un, on va montrer qu'il y en a sur la droite (d).*

Soit $M \in (d)$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que M ait pour coordonnées $(t-1, t, t-2)$. Supposons que M soit équidistant des plans (ABC), (ABD), (ACD) et (BCD). On veut donc que $d(M,(BCD)) = |t-2|$, c'est-à-dire $\frac{|3t-7|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = |t-2|$. On élève au carré, et on cherche les solutions réelles de l'équation

$$(3t-7)^2 - 3\,(t-2)^2 = 0$$

Ainsi, on a

$$(3t-7)^2 - 3\,(t-2)^2 = 9t^2 + 49 - 42t - 3t^2 - 12 + 12t = 6t^2 - 30t + 37 = 0$$

Le discriminant Δ de cette équation du second degré vaut $\Delta = 900 - 4 \times 6 \times 37 = 12$, donc cette équation admet deux solutions réelles :

$$t_1 = \frac{30-2\sqrt{3}}{12} = \frac{15-\sqrt{3}}{6}, \qquad t_2 = \frac{30+2\sqrt{3}}{12} = \frac{15+\sqrt{3}}{6}$$

Réciproquement, soit un point M de l'espace de coordonnées $(t-1, t, t-2)$ avec $t = t_1$ ou $t = t_2$. Un tel point est sur (d).
Si $t = t_1$, alors

$$d(M,(BCD)) = \frac{|3t_1-7|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{\left|\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

et

$$|t-2| = \left|\frac{15-\sqrt{3}}{6} - 2\right| = \left|\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right| = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

Un tel point convient.
Si $t = t_2$, alors

$$d(M,(BCD)) = \frac{|3t_2-7|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{\left|\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

et

$$|t-2| = \left|\frac{15+\sqrt{3}}{6} - 2\right| = \left|\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right| = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

Un tel point convient.
Finalement, il existe deux points (de la droite (d)) équidistants des 4 plans : les points de coordonnées $(\frac{9-\sqrt{3}}{6}, \frac{15-\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6})$ et $(\frac{9+\sqrt{3}}{6}, \frac{15+\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6})$.

En fait, en tout, il existe 8 points équidistants des quatre plans : deux sur la droite (d) et 6 en dehors.

Exercice 4 : Spécialité

1) Soit M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z). On a

$$M \in \mathcal{S} \iff d(M, \mathcal{P}) = MF \iff \frac{\left|z + \frac{1}{4}\right|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{4}\right)^2}$$

On met au carré des quantités positives, donc on a équivalence

$$\begin{aligned} &\iff \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{4}\right)^2 \\ &\iff z^2 + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}z = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{16} - \frac{1}{2}z \\ &\iff z = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

*Pour ceux qui ne seraient pas à l'aise avec un raisonnement par équivalence, **qui pour une fois est licite**, un raisonnement par analyse-synthèse convenait également.*

2) a) Notons $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $z = 2$. Soit M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z).

$$M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_1 \iff \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2 \end{cases} \iff x^2 + y^2 = 2$$

L'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{P}_1$ est un cercle dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

b) Notons $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $x = 0$. Soit M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z).

$$M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_1 \iff \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = 0 \end{cases} \iff y^2 = z$$

L'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{P}_1$ est une parabole équilatère dans le plan $\left(O, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

3) a) Si il existe k un entier relatif tel que

$$\left|\begin{array}{l} x = 7k \\ x = 7k+1 \\ x = 7k+2 \\ x = 7k+3 \\ x = 7k+4 \\ x = 7k+5 \\ x = 7k+6 \end{array}\right. \quad \text{alors} \quad \left|\begin{array}{l} x^2 \equiv 0 \pmod 7 \\ x^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 7 \\ x^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod 7 \\ x^2 \equiv 3^2 \equiv 2 \pmod 7 \\ x^2 \equiv 4^2 \equiv 2 \pmod 7 \\ x^2 \equiv 5^2 \equiv 4 \pmod 7 \\ x^2 \equiv 6^2 \equiv 1 \pmod 7 \end{array}\right.$$

Les restes de la division euclidienne de x^2 par 7 sont $0, 1, 2$ et 4.

b) Si 7 divise à la fois x et y, alors 7 divise $x^2 + y^2$. Réciproquement, supposons que 7 divise $x^2 + y^2$ mais que 7 ne divise pas x (on pourrait prendre y, ça reviendrait au même). Du coup, 7 ne divise pas x^2 car il est premier. Le a) nous donne 3 cas à traiter :

si $x^2 \equiv 1 \pmod 7$ **:** alors il faut que $y^2 \equiv 6 \pmod 7$ pour que $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 7$, or c'est impossible selon a).

si $x^2 \equiv 2 \pmod 7$ **:** alors il faut que $y^2 \equiv 5 \pmod 7$ pour que $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 7$, or c'est impossible selon a).

si $x^2 \equiv 4 \pmod 7$ **:** alors il faut que $y^2 \equiv 3 \pmod 7$ pour que $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 7$, or c'est impossible selon a).

On obtient une impossibilité, du coup 7 divise x. On montre de même que 7 divise y.

4) Soit M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z), avec x, y et z entiers naturels. Notons $\mathcal{P}_3$ le plan d'équation $z = 98$. On a :

$$M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_3 \iff \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 98 \end{cases} \iff x^2 + y^2 = 98$$

Or, $98 = 7 \times 14$. Ainsi, si $x^2 + y^2 = 7 \times 14$, alors 7 divise $x^2 + y^2$ donc x et y par 3b).
Soient maintenant k et ℓ des entiers naturels tels que $x = 7k$ et $y = 7\ell$, alors

$$x^2 + y^2 = 98 \iff 49k^2 + 49\ell^2 = 2 \times 49 \iff k^2 + \ell^2 = 2$$

Comme k^2 et ℓ^2 sont positifs et que k et ℓ sont des entiers naturels, alors $k = \ell = 1$.
Réciproquement, si on prend $k = \ell = 1$, et qu'on pose $x = 7k = 7$ et $y = 7\ell = 7$. On trouve que $x^2 + y^2 = 49 + 49 = 98$.
Finalement, il existe un unique point, dont toutes les coordonnées sont des entiers naturels, qui appartient à l'intersection de l'ensemble $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $z = 98$ et il s'agit de $(7, 7, 98)$.