

# Continuité et connexité, connexité par arcs. Exemples et contre-exemples.

Tanocrède LEPOINT

Janvier 2009

## Résumé

Cet article traite brièvement du thème *Continuité et connexité, connexité par arcs* dans le cadre d'un oral niveau L3 d'une durée de 30 minutes, comportant un exposé par le candidat d'une durée de 15 minutes et de 15 minutes de développement sous les questions du professeur.

L'exposé qui suit a été présenté en 15 minutes - exceptée la démonstration de la connexité par arcs de  $SL_n(\mathbb{R})$  qui a fait l'objet d'une question dans le développement. La troisième partie présente les questions posées par le professeur qui ont découlé de l'exposé.

## 1 Continuité et connexité

**Définition 1.** Soit  $(E, O)$  un espace topologique<sup>1</sup>. Il y a équivalence entre :

- Les seules parties de  $E$  ouvertes et fermées sont  $\emptyset$  et  $E$ .
- $E$  n'admet pas de partition en deux ouverts.
- Si  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$  est continue, alors elle est constante.

Dans le cas où ces conditions sont remplies, on dit que  $E$  **est connexe**.

De plus, si  $A$  est une partie de  $E$ , on dit que  $A$  **est connexe** si  $(A, O_A)$  où  $O_A$  est la topologie induite par  $A$  est connexe.

*Démonstration. (de l'équivalence)*

$a \Rightarrow b$ ) Si  $E = O_1 \cup O_2$  où  $O_1$  et  $O_2$  sont deux ouverts disjoints. On a  $O_1$  qui est ouvert et  $O_1 = E \setminus O_2$  qui est fermé. On déduit donc que  $O_1 = \emptyset$  ou  $E$ , et  $E$  n'admet pas de partition en deux ouverts.

---

1. Pour les étudiants n'ayant pas parlé des espaces topologiques (où une topologie est un ensemble de parties de l'espace, etc.), tout ce document est valable dans un espace métrique.

$b \Rightarrow c$ ) Soit  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$  une fonction continue.  $f^{-1}(\{0\})$  est un ouvert (car  $\{0\}$  est ouvert dans  $\{0, 1\}$ ),  $f^{-1}(\{1\})$  aussi et  $E = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$ .  
On déduit que  $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$  ou  $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$  et donc  $f$  est constante.

$c \Rightarrow a$ ) Soit  $V$  une partie ouverte et fermée de  $E$ . La fonction  $f$  telle que  $f|_V = 1$  et  $f|_{E \setminus V} = 0$  est une fonction continue de  $E$  dans  $\{0, 1\}$ , donc constante, et  $V = f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$  ou  $E$  selon la valeur constante de  $f$ .  $\square$

*Exemples.* –  $\emptyset$  et les singletons<sup>2</sup> sont connexes.  
–  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$  sont connexes, mais pas  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^*$  qui admet en partition en deux ouverts.  
–  $\mathbb{Q}$  n'est pas connexe car  $\mathbb{Q} = (] -\infty, \sqrt{2}[ \cap \mathbb{Q}) \cup (] \sqrt{2}, +\infty[ \cap \mathbb{Q})$

**Proposition 2.** *L'image par une fonction continue  $f$  d'un connexe  $E$  est un connexe.*

*Démonstration.* Soit  $\varphi: f(E) \rightarrow \{0, 1\}$  une fonction continue. On a  $\varphi \circ f: E \rightarrow \{0, 1\}$  qui est continue (car composée de deux fonctions continues) et  $E$  est connexe donc  $\varphi \circ f$  est constante. Donc  $\varphi$  est constante, et  $f(E)$  est connexe.  $\square$

*Conséquence.*  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  n'est pas connexe.  
Supposons qu'il le soit. Comme  $\det: \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$  est continue et surjective, par la proposition précédente  $\mathbb{R}^*$  serait connexe, ce qui est absurde.

**Corollaire 3.** *Si  $E$  et  $F$  sont deux espaces topologiques, et  $f: E \rightarrow F$  un homéomorphisme, on a  $E$  connexe  $\iff F$  connexe.*

**Théorème 4.** *Les connexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.*

*Démonstration.* Admis  $\square$

**Corollaire 5** (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, alors  $f(I)$  est un intervalle.*

**Théorème 6.** *On a les propriétés suivantes :*

- a.  $S^1$  est connexe.
- b.  $S^1$  n'est pas homéomorphe à une partie de  $\mathbb{R}$
- c. Pour  $n \geq 2$ ,  $\mathbb{R}^n$  n'est pas homéomorphe à  $\mathbb{R}$ .

---

2. munis de la topologie discrète (ou distance discrète dans les espaces métriques).

*Démonstration.* a. Soit  $f : t \mapsto (\cos t, \sin t)$ . Alors  $f$  est continue et  $S^1 = f([0, 2\pi[)$  est donc connexe.

b. Supposons qu'il existe  $g : S^1 \rightarrow A \subset \mathbb{R}$  un homéomorphisme. Comme  $S^1$  est connexe,  $A$  est connexe, donc un intervalle. Soit  $y \in \overset{\circ}{A}$ , il existe un unique  $x \in S^1$  tel que  $g(x) = y$ . Soit  $\theta$  tel que  $x = (\cos \theta, \sin \theta)$ . On a  $S^1 \setminus \{x\} = f(] \theta, \theta + 2\pi[)$  qui est connexe alors que  $A \setminus \{y\}$  ne l'est pas. C'est absurde.

c. Si  $h$  était un tel homéomorphisme, la restriction de  $h$  à  $S^1$  serait homéomorphisme avec une partie de  $\mathbb{R}$ . Absurde.  $\square$

## 2 Connexité par arcs et continuité

**Définition 7.** Soit  $(E, O)$  un espace topologique. On dit que  $E$  est **connexe par arcs** si pour tout  $(x, y) \in E^2$ , il existe  $f : [0, 1] \rightarrow E$  continue telle que  $f(0) = x$  et  $f(1) = y$ . On dit que  $f$  est un **arc entre  $x$  et  $y$** .

*Exemple.*  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  est connexe par arcs.

**Proposition 8.** Si  $(E, O)$  est un espace topologique connexe par arcs, alors il est connexe.

*Démonstration.* Admise.  $\square$

*Remarque. Attention :* la réciproque est fautive. Un contre exemple classique est l'adhérence du graphe de  $x \mapsto (x, \sin \frac{1}{x})$  (définie sur  $]0, 1]$ ) qui est connexe mais pas connexe par arcs.

**Proposition 9.** L'image par une fonction continue  $f$  d'un connexe par arcs  $E$  est un connexe par arcs.

*Démonstration.* Soient  $x, y \in f(E)$ . Il existe  $x', y' \in E$  tels que  $f(x') = x$  et  $f(y') = y$ . Comme  $E$  est connexe par arcs, il existe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$  continue telle que  $\gamma(0) = x'$  et  $\gamma(1) = y'$ . On a  $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow f(E)$  qui est un arc entre  $x$  et  $y$ , donc  $f(E)$  est connexe par arcs.  $\square$

*Applications.* On a les applications classiques suivantes :

- a.  $GL_n(\mathbb{C})$  est connexe par arcs.
- b.  $SL_n(\mathbb{R})$  est connexe par arcs.

*Démonstration.* a. Soient  $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ . Soit  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \det((1-z)A + zB)$ .  $P$  est un polynôme en  $z$  et  $P(0) = \det(A) \neq 0$  donc  $P \neq 0$  et il admet un nombre fini de racines complexes  $\{x_1, \dots, x_k\}$ . Il existe  $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$  une fonction continue<sup>3</sup> telle que  $\beta(0) = 0$  et  $\beta(1) = 1$ . Posons  $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), t \mapsto (1 - \beta(t))A + \beta(t)B$ .  $\gamma$  est un arc entre  $A$  et  $B$ .

- b. On va montrer qu'il existe un arc entre n'importe quelle matrice de  $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$  et  $I_n$ , et le résultat découlera immédiatement. Soit  $M \in \mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$ . Il existe  $T_{i_1, j_1}(\lambda_1), \dots, T_{i_k, j_k}(\lambda_k)$  tels que

$$M = T_{i_1, j_1}(\lambda_1) \cdots T_{i_k, j_k}(\lambda_k)$$

Posons pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $M(t) = T_1(t) \cdots T_k(t)$  où  $T_l(t) = T_{i_l, j_l}((1-t)\lambda_l)$  pour  $l \in \{1, \dots, k\}$ . On a  $\forall t, M(t) \in \mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$  (car  $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$  est engendré par les transvections), et  $t \mapsto M(t)$  est continue (car ses composantes sont polynomiales). De plus,  $M(0) = M$  et  $M(1) = I_n$ .  $\square$

### 3 Questions et exercices de développement

- Montrer la connexité par arcs de  $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$ .
- Qu'est-ce qu'une composante connexe? Exemples.
- Si  $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  est une fonction continue surjective. Montrer que  $E$  admet au moins  $n$  composantes connexes.
- $O_n(\mathbb{R})$  est-il connexe? Quid de ses composantes connexes?
- Une composante connexe est-elle fermée? ouverte?

---

3. Il "suffit" d'éviter les racines dans le plan complexe