Cardinaux et dénombrabilité. Utilisation en topologie.

Tancrède Lepoint

Janvier 2009

Résumé

Cet article traite brièvement du thème *Cardinaux et dénombrabilité* dans le cadre d'un oral niveau L3 d'une durée de 30 minutes, comportant un exposé par le candidat d'une durée de 15 minutes et de 15 minutes de développement sous les questions du professeur.
L'exposé qui suit a été préparé pour durer 15 minutes, mais nécessite une certaine rapidité et aisance avec le thème abordé.

1 Dénombrabilité

Définition 1. Soient E et F deux ensembles.
On dit que E **est équipotent à** F (et on note $E \sim F$) si il existe une bijection entre E et F.
On dit que E **est dénombrable** s'il s'injecte dans $\mathbb{N}$, c'est-à-dire qu'il existe une partie $P \subset \mathbb{N}$ tel que $E \sim P$.

Exemple. Les ensembles finis sont dénombrables.

Proposition 2. *Soit E un ensemble. Si E est dénombrable et infini alors $E \sim \mathbb{N}$.*

Exemples (Hôtel d'Hilbert[1]).
- $\mathbb{N} \cup \{x\} \sim \mathbb{N}$.
- $\mathbb{N} \cup \{x_1, \dots, x_n\} \sim \mathbb{N}$.
- $\mathbb{N} \cup \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

Proposition 3.
- *Toute réunion finie de dénombrable est dénombrable.*
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$

Démonstration. Admise. □

Corollaire 4. *Une réunion dénombrable de dénombrable est dénombrable.*

Démonstration. Soit $F = \bigcup_{i\in I} F_i$ où F_i et I sont dénombrables. Pour tout $i \in I$, on a donc $F_i = (f_n^{(i)})_n \subset \mathbb{N}$.
Soit $\varphi : F \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}, f = f_n^{(i)} \longmapsto (i, n)$ est une injection de F dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, donc F est dénombrable. □

Exemple. Si $a < b$ deux réels, l'ensemble $\mathbb{Q}[X]|_{[a,b]}$ est dénombrable.

Démonstration. Soit P_n l'ensemble des polynômes de degré n,

$$P_n = \{a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 / a_i \in \mathbb{Q}\} \sim \{(a_n, \ldots, a_0)/a_i \in \mathbb{Q}\} \sim \mathbb{Q}^{n+1} \sim \mathbb{N}$$

donc P_n est dénombrable, et $\mathbb{Q}[X] = \{0\} + \underbrace{\bigcup_n P_n}_{\text{dénombrable}} \sim \mathbb{N}$. □

2 Cardinalité

La cardinalité est une notion de taille pour les ensembles, même infinis. Il généralise le cardinal d'un ensemble fini.

Définition 5. On dit que deux ensembles équipotents ont **la même cardinalité**. On associe à un ensemble E (même infini) un objet $\mathrm{card}(E)$, et on défini $\mathrm{card}(\emptyset) = 0, \mathrm{card}(\{\emptyset\} = 1, \mathrm{card}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = 2$, etc. Ainsi, E est dit fini si $E \sim \emptyset$ ou $\{1, 2, \ldots, n\}$, sinon il est infini. On remarque que $\mathrm{card}(\{1, 2, \ldots, n\}) = n$.
Si E et F sont deux ensembles, on note donc

- $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)$ si $E \sim F$
- $\mathrm{card}(E) \leq \mathrm{card}(F)$ si $\exists P \subset F, E \sim P$
- $\mathrm{card}(E) < \mathrm{card}(F)$ si $\mathrm{card}(E) \leq \mathrm{card}(F)$ et $E \nsim F$

Théorème 6 (Cantor)**.** *Soit E un ensemble (infini ou non). On a* $\mathrm{card}(E) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(E))$ *où $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E.*

Ce théorème justifie l'existence de cardinaux infinis différents.

Remarque. Pour les ensembles finis, si $\mathrm{card}(E) = n$, alors $\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$. Par analogie, même en dimension infinie on note $\mathrm{card}\mathcal{P}(E) = 2^{\mathrm{card}(E)}$

Lemme 7. *Si A est infini, alors $A \cup \mathbb{N} \sim A$*

Démonstration. Comme A est infini, il contient une partie $P \sim \mathbb{N}$. Comme $\mathbb{N} \cup \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, on a $P \cup \mathbb{N} \sim P$. Notons f cette bijection.
L'application telle que $A \setminus P \xrightarrow{id} A \setminus P$ et $P \cup \mathbb{N} \xrightarrow{f} P$ est une bijection et $A \cup \mathbb{N} \sim A$ □

Théorème 8 (Cantor)**.** *On a* $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = 2^{\mathrm{card}(\mathbb{N})}$. *En particulier,* $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Démonstration. On va montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$. Soit P une partie de $\mathbb{N}$ et $\chi_P : \mathbb{N} \to \{0,1\}, n \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in P \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
On a $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \{(\delta_0, \delta_1, \ldots)/\delta_i \in \{0,1\}\} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$ où $\mathcal{P}_0$ est l'ensemble des suites se terminant par une infinité de 1 union la suite nulle, et $\mathcal{P}_1$ le reste.
Il y a un nombre fini de suites qui n'ont que des 1 à partir du i^e rang (on a le choix de 0 ou 1 pour les $i-1$ premiers termes), et P_0 est donc une réunion dénombrable d'ensembles finis, donc est dénombrable : $\mathcal{P}_0 \sim \mathbb{N}$. Et on a $\mathcal{P}_1 \sim]0,1[$ avec le développement diadique propre[2] $0, \delta_0\delta_1\delta_2\delta_3\ldots$.
Par le lemme, $\mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1 \sim \mathcal{P}_1 \sim]0,1[$ donc $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim]0,1[\sim \mathbb{R}$. □

On dit qu'un ensemble équipotent à $\mathbb{R}$ a **la puissance du continu**. Le lemme de Zorn dit que **l'ensemble des cardinaux est totalement ordonné** et l'hypothèse du continu dit qu'il n'existe aucun ensemble dont le cardinal est strictement compris entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$.

3 Utilisation en topologie : Montrer qu'un espace topologique est séparable ou non

Un espace topologique est dit séparable s'il admet une partie dénombrable dense.

3.1 $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach séparable

En effet, c'est une application du théorème de Stone-Weierstrass.

Théorème 9 (Stone-Weierstrass)**.** *Soit* (E,d) *un espace métrique compact et soit* $A \subset \mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ *une* $\mathbb{Q}$*-algèbre qui sépare les points*[3] *de* E *et qui contient la fonction constante* 1.
Alors A *est dense dans* $(\mathcal{C}(E,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$

2. C'est la même chose que le développement décimal propre, mais en base 2 au lieu de 10
3. C'est-à-dire que $\forall x, y \in E, x \neq y, \exists f \in A, f(x) \neq f(y)$

En effet, $A = \mathbb{Q}[X]|_{[a,b]}$ est dénombrable, c'est une $\mathbb{Q}$-algèbre qui sépare les points de $E = (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ et qui contient la fonction constante 1. Alors A est dense dans E.

3.2 $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach non séparable.

$\ell^\infty = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid \|(u_n)\|_\infty < \infty\}$ est l'ensemble des suites bornées. Soit A une partie de N. Notons $\chi_A : \mathbb{N} \to \{0,1\}, n \mapsto \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } n \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$. Pour $A \neq \emptyset, (\chi_A(n))_n \in \mathcal{S}_\infty(0,1)$ (la sphère infinie centrée en 0 de rayon 1), et pour toutes parties $A, B \subset \mathbb{N}, A \neq B$, on a $\|(\chi_A(n))_n - (\chi_B(n))_n\|_\infty = 1$. Les boules ouvertes centrées en $(\chi_A(n))_n$ de rayon $\frac{1}{2}$ sont deux à deux disjointes, et $\mathrm{card}(\{\chi_A / A \subset \mathbb{N}\}) = \mathrm{card}(\{A / A \subset \mathbb{N}\}) = 2^{\mathrm{card}(\mathbb{N})} = \mathrm{card}(\mathbb{R})$.
Soit $D \subset \ell_\infty$ une partie dense. Pour toute partie $A \subset \mathbb{N}, A \neq \emptyset, (\chi_A(n))_n \in \overline{D}$, donc il existe $d \in D \cap B((\chi_A(n))_n, \frac{1}{2})$. D admet donc une partie équipotente à $\mathbb{R}$, donc n'est pas dénombrable.