

Egalités à connaître et à reconnaître

1 A connaître par coeur

Pour tous nombres a et b , on a :

- $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

2 Dans l'autre sens

Connaître les égalités dans les deux sens est fondamental, parce que l'on ne les retrouve pas toujours dans le bon sens. Pour tous nombres a et b , on a :

- $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$
- $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

3 Exemples

1. Autour de $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

- On peut développer des choses du genre $11^2 = (7+4)^2 = 7^2 + 4^2 + 2 \times 4 \times 7 = 49 + 16 + 56 = 121$ et retrouver ainsi des carrés de gros nombres que l'on ne connaîtrait pas par coeur.
- Permet de résoudre les exercices du brevet.
- On continue à s'en servir tout le temps dans les classes supérieures, même à de très haut niveau.

2. Autour de $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

- Permet de résoudre les exercices du brevet.
- On continue à s'en servir tout le temps dans les classes supérieures, même à de très haut niveau.

3. Autour de $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

- On peut développer des choses du genre $21 \times 19 = (20 + 1)(20 - 1) = 20^2 - 1^2 = 400 - 1 = 399$ et faire des calculs parfois plus rapides que si l'on posait le calcul.
- Permet de résoudre les exercices du brevet.
- Cette égalité est très importante, et sert beaucoup dans les classes supérieures, notamment pour les nombres complexes par exemple.

4 Exercices

4.1 $a^2 + b^2 + 2ab =$

1. Développer

- $(3 + 10)^2 =$
- $17^2 =$
- $(4a + 2a)^2 =$
- $(9x + 7y)^2 =$

2. Factoriser

- $9a^2 + 4b^2 + 12ab =$
- $100x^2 + 49b^2 + 140xb =$
- $x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{3}xy =$

4.2 $a^2 + b^2 - 2ab =$

1. Développer

- $(3 - 10)^2 =$
- $(4a - 2a)^2 =$
- $(9x - 7y)^2 =$

2. Factoriser

- $121a^2 + 4b^2 - 44ab =$
- $100x^2 + 49b^2 - 140xb =$
- $3x^2 + 4y^2 - 4\sqrt{3}xy =$

4.3 $a^2 - b^2 =$

1. Développer

- $(4a - 3b)(4a + 3b) =$
- $(10x - 2y)(10x + 2y) =$
- $17 \times 23 =$

2. Factoriser

- $121a^2 - 4b^2 =$
- $100x^2 - 49b^2 =$
- $3x^2 - 4y^2 =$

4.4 Divers

1. Développer

- $(a - b)(a + b)^3 =$
- $28 \times 32 \times (2a + b)(-b + 2a) =$
- $(a - 3b)^3(3b + a) =$
- $(x - y)^2(x + y)^2 =$

2. Factoriser

- $(a^2 - 4b^2)(A^2 + B^2 + 2AB) =$
- $(100x^2 - 100y^2)(100x^2 + 100y^2 - 200xy)(10000x^2 - y^2) =$

5 Corrigé des exercices

5.1 $a^2 + b^2 + 2ab =$

1. Développer

- Soit vous connaissez le résultat, soit vous appliquez la formule et on a :
 $(3 + 10)^2 = 3^2 + 10^2 + 2 \times 3 \times 10 = 9 + 100 + 60 = 169$
- Soit vous connaissez le résultat, soit vous appliquez la formule (la question d'avant devait vous mettre sur la voie !), et on a :
 $17^2 = (7 + 10)^2 = 7^2 + 10^2 + 2 \times 7 \times 10 = 49 + 100 + 140 = 289$
- Là on remarque que comme on a a dans les deux termes, on peut les ajouter avant de faire la multiplication, et on a :
 $(4a + 2a)^2 = (6a)^2 = 36a^2$.
On aurait trouvé le même résultat en utilisant la formule, mais ce serait une perte de temps.
- Là par contre, on a x et y dans les deux nombres. On ne peut pas faire comme précédemment, et il faut appliquer la formule. On a :
 $(9x + 7y)^2 = (9x)^2 + (7y)^2 + 2 \times (9x) \times (7y) = 81x^2 + 49y^2 + 126xy$
Ici, on ne peut plus simplifier d'avantage !

2. Factoriser

- C'est parti, il s'agit de reconnaître l'égalité qu'on étudie !
 $9a^2 + 4b^2 + 12ab = (3a)^2 + (2b)^2 + 2 \times 3a \times 2b = (3a + 2b)^2$
- Idem.
 $100x^2 + 49b^2 + 140xb = (10x)^2 + (7b)^2 + 2 \times (10x) \times (7b) = (10x + 7b)^2$
- Le $\sqrt{3}$ devait vous mettre sur la voie...
 $x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{3}xy = x^2 + (\sqrt{3}y)^2 + 2 \times x \times (\sqrt{3}y) = (x + \sqrt{3}y)^2$

5.2 $a^2 + b^2 - 2ab =$

1. Développer

- Le plus simple ici est de voir que $3 - 10 = -7$ et que $(-7)^2 = 7^2 = 49$. Sinon, on utilise la formule :
 $(3 - 10)^2 = 3^2 + 10^2 - 2 \times 3 \times 10 = 9 + 100 - 60 = 49$
- Là on remarque que comme on a a dans les deux termes, on peut les ajouter avant de faire la multiplication, et on a :
 $(4a - 2a)^2 = (2a)^2 = 4a^2$
On aurait trouvé le même résultat en utilisant la formule, mais ce serait une perte de temps.
- Là par contre, on a x et y dans les deux nombres. On ne peut pas faire comme précédemment, et il faut appliquer la formule. On a :
 $(9x - 7y)^2 = (9x)^2 + (7y)^2 - 2 \times (9x) \times (7y) = 81x^2 + 49y^2 - 126xy$

2. Factoriser

- Il faut connaître les carrés des nombres jusqu'à 12 ! $121 = 11^2$, donc
 $121a^2 + 4b^2 - 44ab = (11a)^2 + (2b)^2 - 2 \times (11a) \times (2b) = (11a - 2b)^2$
- Rien d'extraordinaire :
 $100x^2 + 49b^2 - 140xb = (10x)^2 + (7b)^2 - 2 \times (10x) \times (7b) = (10x - 7b)^2$
- Ah mais 3 n'est pas un carré ?! Eh si... $(\sqrt{3})^2 = 3$! D'où :
 $3x^2 + 4y^2 - 4\sqrt{3}xy = (\sqrt{3}x)^2 + (2y)^2 - 2 \times (\sqrt{3}x) \times (2y) = (\sqrt{3}x - 2y)^2$
Les plus malins d'entre vous auront remarqué que $(-\sqrt{3})^2 = 3$, mais en fait on obtient le même résultat (heureusement !) :
 $3x^2 + 4y^2 - 4\sqrt{3}xy = (-\sqrt{3}x)^2 + (2y)^2 + 2 \times (-\sqrt{3}x) \times (2y) = (-\sqrt{3}x + 2y)^2 = (\sqrt{3}x - 2y)^2$
Attention, ici on a utilisé l'autre formule : $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.
- $121a^2 + 4b^2 - 44ab =$
- $100x^2 + 49b^2 - 140xb =$
- $3x^2 + 4y^2 - 4\sqrt{3}xy =$

5.3 $a^2 - b^2 =$

1. Développer

- C'est une application directe de la formule :
 $(4a - 3b)(4a + 3b) = (4a)^2 - (3b)^2 = 16a^2 - 9b^2$
- C'est une application directe de la formule :
 $(10x - 2y)(10x + 2y) = (10x)^2 - (2y)^2 = 100x^2 - 4y^2$
- Ici, il faut remarquer que $17 = 20 - 3$ et $23 = 20 + 3$, donc
 $17 \times 23 = (20 - 3)(20 + 3) = (20)^2 - 3^2 = 400 - 9 = 391$

2. Factoriser

- Il faut connaître les carrés des nombres jusqu'à 12 ! $121 = 11^2$, donc
 $121a^2 - 4b^2 = (11a)^2 - (2b)^2 = (11a - 2b)(11a + 2b)$
- Rien d'extraordinaire :
 $100x^2 - 49b^2 = (10x)^2 - (7b)^2 = (10x - 7b)(10x + 7b)$
- Ah mais 3 n'est pas un carré ?! Eh si... $(\sqrt{3})^2 = 3$! D'où :
 $3x^2 - 4y^2 = (\sqrt{3}x)^2 - (2y)^2 = (\sqrt{3}x - 2y)(\sqrt{3}x + 2y)$
Les plus malins d'entre vous auront remarqué que $(-\sqrt{3})^2 = 3$, mais en fait on obtient le même résultat (heureusement !) :
 $3x^2 - 4y^2 = (-\sqrt{3}x)^2 - (2y)^2 = (-\sqrt{3}x - 2y)(-\sqrt{3}x + 2y) = -(\sqrt{3}x + 2y)(-\sqrt{3}x + 2y) = (\sqrt{3}x + 2y)(\sqrt{3}x - 2y)$

5.4 Divers

1. Développer

- On remarque que $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$ et on a donc :
 $(a - b)(a + b)^3 = (a - b)(a + b)(a + b)^2 = [(a + b)(a - b)] \times [(a + b)^2]$.
On applique les formules adéquates à chaque morceau :
 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ et $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ et on obtient donc
 $(a - b)(a + b)^3 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + 2ab) = a^4 + a^2b^2 + a^22ab - b^2a^2 - b^4 - b^22ab = a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^2$
- Il faut remarquer que $28 = 30 - 2$ et $32 = 30 + 2$, et que $-b + 2a = 2a - b$, d'où :
 $28 \times 32 \times (2a + b)(-b + 2a) = (30 - 2)(30 + 2)(2a + b)(2a - b)$
Calculons les deux parties :
 $(30 - 2)(30 + 2) = (30)^2 - 2^2 = 900 - 4 = 896$
 $(2a + b)(2a - b) = (2a)^2 - b^2 = 4a^2 - b^2$
D'où finalement,
 $28 \times 32 \times (2a + b)(-b + 2a) = 896 \times (4a^2 - b^2) = 2684a^2 - 896b^2$
- Comme au premier point, il faut remarquer que $(a - 3b)^3 = (a - 3b)(a - 3b)^2$ et que $(a - 3b) = -(3b - a)$, et on déduit que
 $(a - 3b)^3(3b + a) = (a - 3b)^2 \times [-(3b - a)(3b + a)]$
On applique les formules adéquates à chaque morceau :
 $(a - 3b)^2 = a^2 + (3b)^2 - 2 \times a \times (3b) = a^2 + 9b^2 - 6ab$
 $-(3b - a)(3b + a) = -[(3b)^2 - a^2] = a^2 - 9b^2$
En remplaçant et développant, on obtient
 $(a - 3b)^3(3b + a) = (a^2 + 9b^2 - 6ab)(a^2 - 9b^2) = a^4 - 9a^2b^2 + 9b^2a^2 - 81b^4 - 6a^3b + 54ab^3 = a^4 - 6a^3b + 54ab^3 - 81b^4$
- On pourrait développer directement et obtenir le bon résultat, mais il vaut mieux remarquer que $(x - y)^2(x + y)^2 = (x - y)(x + y) \times (x - y)(x + y)$. Et le résultat vient plus rapidement :
 $(x - y)^2(x + y)^2 = (x^2 - y^2) \times (x^2 - y^2) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

2. Factoriser

- Attention ici, $a \neq A$ donc on ne peut pas factoriser les deux parties entre elles. Néanmoins, on reconnaît les égalités bien connues $a^2 - 4b^2 = a^2 - (2b)^2 = (a - 2b)(a + 2b)$ et $(A^2 + B^2 + 2AB) = (A + B)^2$, d'où la factorisation :
 $(a^2 - 4b^2)(A^2 + B^2 + 2AB) = (a - 2b)(a + 2b)(A + B)^2$

- Traitons les termes un par un :

$$(100x^2 - 100y^2) = 100(x^2 - y^2) = 100(x - y)(x + y)$$

$$(100x^2 + 100y^2 - 200xy) = 100(x^2 + y^2 - 2xy) = 100(x - y)^2$$

$$(10000x^2 - y^2) = (100x^2 - y^2) = (100x - y)(100x + y)$$

D'où la factorisation finale :

$$(100x^2 - 100y^2)(100x^2 + 100y^2 - 200xy)(10000x^2 - y^2) = 100 \times 100 \times (x - y)(x + y)(x + y)^2(100x - y)(100x + y) = 10000(x - y)(x + y)^3(100x - y)(100x + y)$$

Rassurez vous, c'était difficile !