Le troisième problème de Hilbert
A propos de la géométrie des polyèdres

Tancrède Lepoint

Jeudi 26 février 2009

Introduction

En 1900, lors de l'Exposition Universelle, à Paris, a lieu le deuxième congrès de mathématiques. L'exposé de David Hilbert[1] est l'un des plus attendus. Le 8 août 1990, il présente donc sa liste de 23 problèmes[2] qui tiennent les mathématiciens en échec[3] et qui marqueront le cours des mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle.

On s'intéresse dans cet exposé au **troisième problème de Hilbert**, qui est considéré comme le plus facile, et qui a eu une existence brève puisque la solution a été apportée par Dehn dès 1900. Il fallait spécifier *deux tétraèdres de même base et de même hauteur, qui ne se subdivisent d'aucune manière en tétraèdres superposables, et qui ne se laissent pas compléter par des tétraèdres superposables en des polyèdres pour lesquels une telle subdivision en tétraèdres superposables soit possible*[4]. Autrement dit, si deux polyèdres ont même volume, peut-on produire un puzzle pour passer de l'un à l'autre ? Ou encore, si l'on a deux polyèdres de même volume, peut-on découper le premier en un nombre fini de morceaux (polyèdres) et obtenir le second en recollant les morceaux ?

La réponse à ce problème est négative. En particulier il est impossible de découper un cube en un nombre fini de polyèdres et de reconstituer un tétraèdre régulier (de même volume) à partir des morceaux. La démonstration de Dehn repose sur l'introduction d'un nouvel invariant appelé **l'invariant de Dehn**.

On s'attachera dans cet exposé à définir de manière exacte ce que sont les découpages et les recollements, à présenter le problème équivalent dans le plan, et à introduire l'invariant

[1] 1862-1943, mathématicien allemand, considéré comme un des plus grands mathématiciens du XX$^{\text{ème}}$ siècle.

[2] En fait, pressé par le temps, il ne présente qu'une sélection de 10 d'entre eux.

[3] Il reste encore 5 problèmes (les 8, 12, 16, 20 et 23ème) qui ne sont que partiellement résolus.

[4] Ouf ! On peut respirer...

de Dehn afin de prouver qu'en découpant un cube en un nombre fini de morceaux, et en les recollant, on ne peut obtenir un tétraèdre régulier de même volume.

1 Définitions générales

On travaille dans l'espace affine $\mathbb{R}^d$ (avec $d = 2$ ou 3), muni de sa structure euclidienne canonique.

1.1 Découpage et recollement

Définition 1. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^d$. On dit qu'elles sont équivalentes par découpage et recollement (ou **équidécomposables**) s'il existe une partition de A (resp. de B), $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ (resp. $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$) et, pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$, une isométrie $g_i : A_i \to B_i$ qui applique A_i sur B_i. On note alors $A \sim B$.

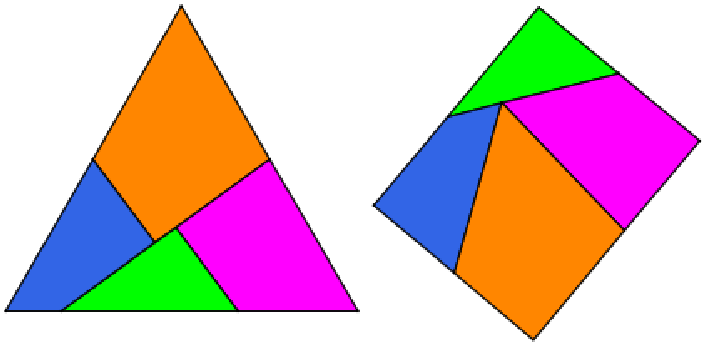


FIG. 1 – Triangle et rectangle équidécomposables

Proposition 1. *La relation $A \sim B$ est une relation d'équivalence sur les parties de $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. La réflexivité et la symétrie sont triviales (les isométries étant bijectives). La transitivité nécessite de découper les découpages. $\square$

1.2 Polygones, polyèdres, tétraèdres

Afin de se mettre d'accord, il est nécessaire de définir clairement les notions de polygones (ou devrait-on dire de domaines polygonaux) dans le plan, de polyèdre et de tétraèdre dans l'espace.

Définition 2 (polygone)**.** Un polygone est une figure géométrique plane, formée d'une suite de segments, chacun d'entre eux partageant une extrémité avec le précédent et le suivant, délimitant ainsi un contour fermé.

Exemples. Les triangles, les rectangles, les hexagones...

Définition 3 (polyèdre et tétraèdre)**.** Un **polyèdre** est traditionnellement une forme tridimensionnelle qui se compose d'un nombre fini de *faces* polygonales qui sont des parties de plans ; les faces se rencontrent par paires le long des *arêtes* qui sont des segments de droite, et les arêtes se rencontrent aux points nommés *sommets*.
Un **tétraèdre** est un polyèdre dont les 4 faces sont des triangles. Il est dit **régulier** si ses 4 faces sont des triangles équilatéraux.

1.3 Aperçu rapide de la mesure

Introduisons ici brièvement la notion de mesure qui va permettre de montrer la proposition suivante :

Proposition 2. *Deux parties bornées équivalentes par découpage et recollement ont même aire ou même volume.*

Définition 4. On appelle **mesure** des aires si $d = 2$, des volumes si $d = 3$, une application μ non nulle, définie sur une partie $\mathcal{Q}$ de l'ensemble des parties bornées de $\mathbb{R}^d$, qui vérifie les propriétés suivantes :

- **Additivité simple.** Si on a une partition $E = A \cup B$ avec $E, A, B \in \mathcal{Q}$, on a $\mu(E) = \mu(A) + \mu(B)$
- **Invariance par isométrie.** Si A est dans $\mathcal{Q}$ et si g est une isométrie, alors $g(A)$ est dans $\mathcal{Q}$ et on a $\mu(g(A)) = \mu(A)$.

Autrement dit, μ est invariante par découpage et recollement (avec des morceaux dans $\mathcal{Q}$).

Remarques. La famille $\mathcal{Q}$ est vague dans la définition. Il est clair qu'on attend qu'elle contienne les parties "usuelles", i.e. les polygones et les disques dans le plan, les polygones et les boules dans l'espace.
De plus, on demande à ce que $\mathcal{Q}$ soit un **clan**, c'est-à-dire qu'elle soit stable par union finie et différence (et donc par intersection), afin de pouvoir effectuer sans encombre les opérations ensemblistes.

Démonstration. (de la proposition 2)
Cela découle immédiatement des axiomes. Si A et B dont équidécomposables, il existe une partition de A (resp. de B), $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ (resp. $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$) et, pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$, une isométrie $g_i : A_i \to B_i$. On a donc

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(g(A_i)) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \mu(B)$$

Finalement A et B ont la même aire (le même volume en dimension 3). □

1.4 Problème de Bolyai-Hilbert-Tarski

On s'intéresse ici à la réciproque de la proposition 2.

Si deux parties bornées ont la même aire (resp. le même volume), sont-elles équidécomposables ? Est-elle vraie au moins pour certaines parties particulières (les polygones ou les polyèdres, par exemple) ?

La question traitée par Bolyai (1830) concerne le découpage des polygones, celle posée par Hilbert (et donc le problème qui nous intéresse) est la question analogue pour les polyèdres. Nous allons étudier ces deux questions, et tenter d'y répondre.

2 Présentation brève du théorème de Bolyai dans le plan

Dans cette partie, nous allons donner une réponse positive à l'un de nos deux problèmes : deux polygones de même aire sont-ils équidécomposables ?

Théorème 1 (Bolyai, 1832 - Gerwin, 1833)**.** *Soient A et B deux polygones de même aire. Alors, A et B sont équivalents par découpage et recollement.*

Pour démontrer cela, on va démontrer un lemme plus fort :

Lemme 1. *Soit A un polygone quelconque. Il existe un rectangle R équivalent à A dont un coté est de longueur unité.*

Supposons temporairement ce lemme pour démontrer le théorème.

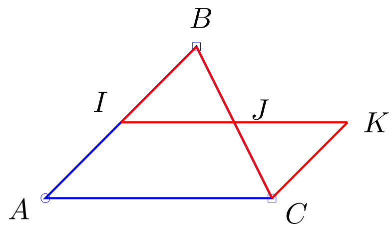
Démonstration. (du théorème)
Soit A et B deux polygones de même aire. Il existe des rectangles R_A et R_B dont un coté est l'unité, respectivement équivalents à A et B. Comme l'aire est conservée par équivalence, R_A et R_B ont la même aire, donc leurs deuxièmes cotés sont égaux. Ils sont ainsi isométriques, donc équivalents, et on a $A \sim R_A \sim R_B \sim B$ donc $A \sim B$ par transitivité. □

Plan de la preuve du lemme

En fait, il suffit d'établir ce lemme pour un triangle. En effet, si P est un polygone quelconque, on peut toujours l'écrire comme réunion de triangles $T_1, T_2, \ldots, T_n$, et on trouve alors des rectangles $R_1, R_2, \ldots, R_n$ de longueur 1 respectivement équivalents à chaque triangle, et en les mettant bout à bout, on obtient un rectangle de coté 1 équivalent au polygone P initial.

Découpons un triangle pour en faire un parallélogramme :

Lemme 2. *Soit T un triangle. Il existe un parallélogramme P tel que $T \sim P$.*



Démonstration. Soit $T = ABC$ un triangle, I et J les milieux de $[BA]$ et $[BC]$. On considère K le symétrique de I par rapport à J. Le triangle T et le parallélogramme $IKCA$ sont équivalents. □

On passe maintenant d'un parallélogramme à un autre, mais dont un coté est 1 :

Lemme 3. *Soit P un parallélogramme.*

a. *Il existe un parallélogramme P', dont un coté est de longueur rationnelle, tel que $P \sim P'$.*

b. *Il existe un parallélogramme P'', dont un coté est de longueur p avec $p \in \mathbb{N}^*$, tel que $P \sim P''$.*

c. *Il existe un parallélogramme P''' dont un coté vaut 1 et tel que $P \sim P'''$.*

Lemme 4. *Soit $P = ABCD$ un parallélogramme dont le coté AB vaut 1. Alors P est équivalent à un rectangle de coté 1.*

3 Découpage des polyèdres

3.1 Pourquoi cette question de Hilbert ?

Nous connaissons tous la formule élémentaire qui donne l'aire d'un triangle : la base fois la hauteur divisé par deux. La preuve de ce résultat consiste à découper le triangle en petits polygones et à les réarranger afin d'obtenir un rectangle qui a la même aire.

Peut-on utiliser un argument semblable[5] afin d'obtenir le volume d'une pyramide ? En effet, on obtiendrait une preuve "élémentaire" du théorème XII.5 d'Euclide (qui dit que deux pyramides de même base et de même hauteur ont même volume). Et nous obtiendrions ainsi une définition élémentaire du volume d'un polyèdre. En effet, Euclide utilise un processus infini, l'exhaustion (un passage à la limite). Les démonstrations ultérieures de cette formule font toutes appel à des méthodes relevant de près ou de loin à un calcul intégral et aucune démonstration géométrique plus simple n'a pu être trouvée.

Théorème 2. *Le tétraèdre régulier n'est pas équidécomposable avec le cube de même volume.*

[5] c'est-à-dire une preuve par découpage et recollement

Pour prouver ce théorème, Dehn a introduit un nouvel invariant qui porte son nom : l'invariant de Dehn.

3.2 La contribution de Dehn

3.2.1 Un peu d'algèbre linéaire

Pour tout ensemble fini de réels $M = \{m_1, \ldots, m_k\} \subset \mathbb{R}$, on définit

$$\mathrm{Vect}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} q_i m_i / q_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

La première observation (certes triviale) est que $\mathrm{Vect}(M)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie, et sa dimension est le minimum des cardinaux des sous-ensembles générateurs de M. Ainsi,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}(M) \leq k = |M|$$

Dans la suite, nous considérons les fonctions $\mathbb{Q}$-linéaires

$$f \colon \mathrm{Vect}(M) \to \mathbb{Q}$$

Lemme 5. *Pour tous $\mathbb{Q}$-sous-espaces vectoriels V et V' de $\mathbb{R}$ tels que $V \subset V'$, toute fonction $\mathbb{Q}$-linéaire $f \colon V \to \mathbb{Q}$ peut être étendue en une fonction $\mathbb{Q}$-linéaire $f' \colon V' \to \mathbb{Q}$ telle que $f'(v) = f(v), \forall v \in V$*

Démonstration. Toute fonction $\mathbb{Q}$-linéraire $V \to \mathbb{Q}$ est déterminée par l'image d'une $\mathbb{Q}$-base sur V. Or toute base de V peut être complétée en une base de V', et tout le reste s'en suit. □

3.2.2 Les invariants de Dehn

Définition 5. L'**angle diédral** (ou **dièdre**) ϕ_{AB} entre deux plans A et B est l'angle entre leur deux vecteurs normaux n_A et n_B modulo π. On a donc

$$\cos \phi_{AB} = n_A \cdot n_B$$

Soit un polyèdre P dans l'espace. On pose M_P comme étant l'ensemble des angles dièdres (i.e. l'angle entre deux faces adjacentes) union π.
Soit $M \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini contenant M_P, et soit $f : \mathrm{Vect}(M) \to \mathbb{Q}$ une fonction $\mathbb{Q}$-linéaire telle que $f(\pi) = 0$. On définit l'**invariant de Dehn de** P (relativement à f) comme le nombre réel :

$$D_f(P) = \sum_{e \in P} \ell(e) \cdot f(\alpha(e))$$

où l'on somme sur toutes les arêtes e du polyèdre, $\ell(e)$ représentant la longueur de l'arête e et $\alpha(e)$ l'angle dièdre entre deux faces dont l'intersection est e.

Exemple (l'invariant de Dehn du cube). Par exemple, considérons l'exemple du cube C. Chaque face coupe orthogonalement ses 4 faces adjacentes, donc $M_C = \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$.
De plus, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} f(\pi) = 0$ quelque soit la fonction f $\mathbb{Q}$-linéaire choisie, donc

$$\forall f, D_f(C) = 0$$

3.2.3 Le théorème de Dehn-Hadwinger

Théorème 3. *Soient P et Q deux polyèdres avec respectivement des angles dièdres $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ et $\beta_1, \ldots, \beta_q$ sur leurs arêtes, et soit M un ensemble fini de réels tel que*

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q, \pi\} \subset M$$

et soit $f : \mathrm{Vect}(M) \to \mathbb{Q}$ une fonction $\mathbb{Q}$-linéaire quelconque vérifiant $f(\pi) = 0$ telle que

$$D_f(P) \neq D_f(Q)$$

alors P et Q ne sont pas équidécomposables.

Démonstration.
- Si P a une décomposition en un nombre fini de polyèdres $P_1, \ldots, P_n$ et que tous les angles diédraux de ces pièces sont contenus dans M, alors pour toute fonction $\mathbb{Q}$-linéaire $f : \mathrm{Vect}(M) \to \mathbb{Q}$, l'invariant de Dehn est additif :

  $$D_f(P) = D_f(P_1) + \ldots + D_f(P_n) \tag{1}$$

  Soit e une arête de $P_k, k = 1, \ldots, n$. On a les cas suivants :
  - e est à l'intérieur de P. Comme tout le voisinage de e est inclus dans P, la somme des angles des pièces ayant e comme arête (où comme partie d'arête) fait 2π. Ainsi, dans la partie droite de (1), l'arête e donne une contribution $f(2\pi) \cdot \ell(e) = 0$ (car f linéaire).
  - e est sur une face de P. Le même argument que précédemment est valide, exepté le fait que la somme des angles vaut π et que la contribution est donc $f(\pi) \cdot \ell(e) = 0$
  - e est contenu dans une arête e' de P. Cette fois ci, la contribution dans la partie droite de (1) est $f(\alpha(e')) \cdot \ell(e)$
- Raisonnons par contraposée en supposant $P \sim Q$. On peut agrandir M en un ensemble fini M' qui inclut également tous les angles diédraux qui apparaîtront dans toutes les pièces considérées. Par le lemme 5, on peut étendre f en une fonction $\mathbb{Q}$-linéaire $f' : \mathrm{Vect}(M') \to \mathbb{Q}$ et par la première partie de la preuve, on a une relation de la forme

  $$D_{f'}(P) + D_{f'}(P_1) + \cdots + D_{f'}(P_m) = D_{f'}(Q) + D_{f'}(Q_1) + \cdots + D_{f'}(Q_m)$$

où $D_{f'}(P_i) = D_{f'}(Q_i), \forall i$ car P_i et Q_i représentent le même polyèdre à une isométrie près. On en déduit que $D_{f'}(P) = D_{f'}(Q)$

$\square$

3.3 Preuve du troisième problème de Hilbert

Rappelons le théorème ici :

Théorème 4. *Le tétraèdre régulier n'est pas équidécomposable avec le cube de même volume.*

Afin de prouver ce théorème, on va considérer une "bonne" fonction f $\mathbb{Q}$-linéaire telle que l'invariant de Dehn du tétraèdre soit non nul, puisque celui du cube est toujours nul, quelque soit la fonction f choisie. Considérons le tétraèdre régulier T de volume 1 avec des cotés de longueur $\ell(= 6\sqrt{2})$. Il faut calculer l'angle α entre deux faces du tétraèdre.
Cet angle a pour cosinus $\frac{1}{3}$ (ceci provient du fait que la projection du sommet est à $\frac{1}{3}$ des hauteurs). On en déduit $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$.

Soit $M_T = \{\alpha, \pi\}$. Montrons que M_T est une $\mathbb{Q}$-famille libre.
Supposons que $\alpha = \frac{p}{q}\pi$. On aurait alors $q\alpha = p\pi$ donc $\cos(q\alpha) = \pm 1$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, qu'on a $\cos(n\alpha) = \frac{a_n}{3^n}$ où a_n n'est pas un multiple de 3. On a bien l'initialisation ($\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$ et $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = \frac{-7}{3^2}$) et si l'on suppose la propriété vraie aux rangs n et $n-1$, on utilise la formule :

$$\cos((n+1)\alpha) + \cos((n-1)\alpha) = 2\cos(\alpha)\cos(n\alpha)$$

ce qui donne $\cos((n+1)\alpha) = \frac{2a_n - 9a_{n-1}}{3^{n+1}}$. Par récurrence, on a donc $\forall q \in \mathbb{N}^*, \cos(q\alpha) \neq \pm 1$.
Choisissons alors une fonction $\mathbb{Q}$-linéaire $f : \mathrm{Vect}(M) \to \mathbb{Q}$ définie par $f(\alpha) = 1$ et $f(\pi) = 0$. Pour cette fonction, on a $D_f(T) = 6\ell f(\alpha) = 6\ell \neq 0$ et $D_f(C) = 0$. Ainsi, $T \nsim C$. $\square$

4 En utilisant le produit tensoriel

Les sous-groupes de $\mathbb{R}$ étant soit dense, soit de la forme[6] $\alpha\mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on a $\pi\mathbb{Z}$ qui est un sous-groupe distingué[7] de $\mathbb{R}$. On peut ainsi considérer le groupe quotient $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, qui peut être vu comme le groupe des angles de droite[8].

[6] Exercice classique à savoir refaire rapidement
[7] car $(\mathbb{R}, +)$ est abélien
[8] au moyen de la mesure des angles en radians

On peut définir l'invariant de Dehn dans le produit tensoriel $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$. Rappelons la propriété universelle du produit tensoriel.

Proposition 3 (Propriété universelle du produit tensoriel)**.** *Soit A un anneau commutatif. Soient M et N deux A-modules. Le produit tensoriel de M avec N sur A, noté $M \otimes_A N$ est un A-module tel que :*

– il existe $i_{M,N}\colon M \times N \to M \otimes_A N$ une application A-bilinéaire

– pour tout A-module P, et pour toute application A-bilinéaire $f\colon M \times N \to P$

Il existe une unique application A-linéaire $F\colon M \otimes_A N \to P$ telle que $F \circ i_{M,N} = f$

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "i_{M,N}"] \arrow[d, "f"'] & M \otimes_A N \arrow[dl, dashed, "F"] \\ P & \end{tikzcd}$$

Appliqué au problème actuel, on a une application $\mathbb{Z}$-bilinéaire naturelle

$$\begin{array}{rccc} i: & \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) & \to & \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) \\ & (a,\theta) & \mapsto & a \otimes \theta \end{array}$$

ainsi qu'une fonction $\mathbb{Z}$-bilinéaire

$$\begin{array}{rccc} \overline{f}: & \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) & \to & \mathbb{R} \\ & (a,\theta) & \mapsto & af(\theta) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\overline{f}"'] & \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) \arrow[dl, dashed, "F"] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Par la propriété précédente, il existe une unique application $\mathbb{Z}$-linéaire

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) & \to & \mathbb{R} \\ & a \otimes \theta & \mapsto & af(\theta) \end{array}$$

On peut ainsi définir l'invariant de Dehn indépendamment de la fonction f en l'exprimant dans le produit tensoriel. Soit un polyèdre P dans l'espace. On définit l'**invariant de Dehn de** P comme le nombre réel :

$$\delta(P) = \sum_{e \in P} \ell(e) \otimes \alpha(e)$$

où l'on somme sur toutes les arêtes e du polyèdre, $\ell(e)$ représentant la longueur de l'arête e et $\alpha(e)$ l'angle entre deux faces dont l'intersection est e.

On peut donc reformuler le théorème 3 :

Théorème 5. *Si deux polyèdres sont équidécomposables, ils ont le même invariant de Dehn.*

qui repose sur le caractère additif de l'invariant de Dehn

Lemme 6. *Si un polyèdre P est réunion disjointe de polyèdres $P_1, \ldots, P_r$, on a*

$$\delta(P) = \delta(P_1) + \cdots + \delta(P_r)$$

On souhaite donc calculer l'invariant de Dehn du cube et celui du tétraèdre.

Lemme 7. *Un élément $t = a \otimes \theta \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$, avec $a \neq 0$, est nul si et seulement si $\frac{\theta}{\pi}$ est rationnel.*

Démonstration. Si $\frac{\theta}{\pi} = \frac{p}{q}$, on a $t = (q\frac{a}{q}) \otimes \frac{p}{q}\pi = \frac{a}{q} \otimes (q\frac{p}{q}\pi) = \frac{a}{q} \otimes p\pi = \frac{a}{q} \otimes 0 = 0$. Supposons maintenant que $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel. Par la propriété universelle du produit tensoriel (proposition 3), étant données

$$\begin{array}{rcl} \overline{f} : \ \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) & \to & \mathbb{R} \\ (a, \theta) & \mapsto & af(\theta) \end{array} \quad \text{et } i : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) & \to & \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) \\ (a, \theta) & \mapsto & a \otimes \theta \end{array}$$

deux applications bilinéaires, il existe une unique application $\mathbb{Z}$-linéaire

$$\begin{array}{rcl} F : \ \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) & \to & \mathbb{R} \\ a \otimes \theta & \mapsto & af(\theta) \end{array}$$

On aura gagné si on trouve f telle que $f(\theta) \neq 0$. Comme $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et qu'il existe[9] des bases de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, et comme θ et π sont $\mathbb{Q}$-indépendants, on les complète en une base et on envoie π sur 0 et θ sur 1. Cet homomorphisme se factorise par $\pi\mathbb{Z}$ et c'est ce que l'on désirait. □

Considérons le cube C. On utilisant la bilinéarité du produit tensoriel sur $\mathbb{Z}$ on a

$$\delta(C) = \sum_{e \in C} \ell(e) \otimes \frac{\pi}{2} = \sum_{e \in C} 2\frac{\ell(e)}{2} \otimes \frac{\pi}{2} = \sum_{e \in C} \frac{\ell(e)}{2} \otimes 2\frac{\pi}{2} = \sum_{e \in C} \frac{\ell(e)}{2} \otimes \pi = 0$$

Considérons maintenant le tétraèdre régulier T de volume 1 avec des cotés de longueur $\ell (= 6\sqrt{2})$. En utilisant le lemme 7 et la liberté de la famille $\{\alpha, \pi\}$ où α est tel que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, on a

$$\delta(T) = \sum_{e \in T} \ell(e) \otimes \alpha = \sum_{e \in T} \ell \otimes \alpha = 6 \underbrace{\ell \otimes \alpha}_{\neq 0} \neq 0$$

[9] On a besoin ici de l'axiome du choix. Il existe une autre démonstration n'utilisant pas l'axiome du choix, mais je renvoie ici à [Perrin].

5 Au delà du problème de Hilbert

5.1 Le théorème de Sylder

En 1965, Sylder démontre en fait que le théorème 5 est une équivalence. Le résultat définitif sur le problème du découpage des polyèdres est le suivant :

Théorème 6 (Sylder, 1965)**.** *Deux polyèdres sont équivalents par découpage et recollement (en polyèdres) si et seulement si ils ont même volume et même invariant de Dehn.*

Démonstration. On renvoie à [Cartier] pour une preuve. □

5.2 Pour les concours d'enseignement

En 1985, la même année que le Séminaire Bourbaki où est traitée très précisément la décomposition des polyèdres, où est démontré le théorème de Sylder, où est traitée l'interprétation homologique du problème, la K-théorie et les groupes de Lie rendus discrets, etc., l'étude de l'invariant de Dehn est tombée à l'agrégation externe de mathématiques et à l'É.N.S Saint-Cloud et Fontenay.

Le problème d'agrégation porte notamment sur les invariants de découpage, sur l'équidécomposabilité dans le plan et dans l'espace, l'espace vectoriel $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est construit, et l'invariant de Dehn est utilisé pour montré ce qui a été fait dans ce document. C'est une extension intéressante, un problème de géométrie à l'agrégation qui, selon le rapport des examinateurs, n'a pas été vraiment réussi.

Sinon, je recommande vivement la lecture de [Perrin], dont cet exposé est fortement inspiré, et qui traite des découpage et recollement. Le but du texte est de faire le lien entre les notions de mesure des aires et des volumes et la méthode de découpage et recollement, afin de montrer qu'elle peut jouer un grand rôle dans la pratique de la géométrie.

Références

[Perrin] Daniel Perrin – *Aires et Volumes : découpage et recollement* euler.ac-versailles.fr/webMathematica/reflexionpro/conferences/perrin/iprdp.pdf

[Cartier] Cartier P., *Décomposition des polyèdres : le point sur le troisième problème de Hilbert*, Séminaire Bourbaki, 1984-85, numéro 646.

[Aigner] Martin Aigner – *Hilbert's third problem : decomposing polyhedra*, Chapter 8, *Proof from the book*, Springer, 2004

[Planet Math] Site Internet planetmath.org
planetmath.org/encyclopedia/ScissorEquivalent.html

[Agreg] Problème d'agrégation (mathématiques générales), 1985