Annexe : démonstrations

par Valvino

Lien vers l'article correspondant.

Irrationnalité de $\sqrt{2}$

Supposons par l'absurde qu'il existe deux entiers a et b tels que $b \neq 0$ et tels que a et b soient premiers entre eux (c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de diviseurs communs) vérifiant

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

En élevant au carré et en multipliant par b^2, il vient $2b^2 = a^2$. Ceci montre que a^2 est pair. Or le passage au carré préserve la parité, donc a est aussi pair. Il existe donc un entier k tel que $a = 2k$. On a donc $2b^2 = (2k)^2 = 4k^2$. En simplifiant par 2, on a $b^2 = 2k^2$, donc b^2 est pair. On en déduit que b est pair. C'est absurde. En effet, a et b sont tous les deux pairs, donc divisble par 2. Or on a supposé qu'ils étaient premiers entre eux. Finalement, $\sqrt{2}$ est bien irrationnel.

Non-dénombrabilité des réels

On va se contenter de le montrer pour les réels compris entre 0 et 1. Par l'absurde, supposons que l'ensemble $[0, 1]$ des réels compris entre 0 et 1 soit dénombrable. Alors on peut l'énumerer par une suite x_1, x_2, $\ldots$, x_n, etc... Chaque réel x_1 dans $[0, 1]$ admet un développement décimal : $x_i = 0, x_{i1}x_{i2}x_{i3}\ldots$ avec les x_{ik} des entiers compris entre 0 et 9.

On construit alors un réel x appelé *nombre diagonal* de la manière suivante : son k-ième chiffre après la virgule est égal à 2 si le k-ième chiffre x_{kk} du réel x_k est égal à 1, et à 2 sinon.

Le réel x ainsi construit est clairement dans $[0, 1]$. Mais il est différent de tous les x_i, car il diffère par construction d'au moins une décimale de chaque x_i. Finalement, l'ensemble $[0, 1]$ ne peut être décrit par une suite de nombres, il n'est donc pas dénombrable.

Algorithme de calcul de $\sqrt{2}$

On veut calculer $\sqrt{2}$ à 10^{-n} près, avec n un entier naturel non nul.

1. Prendre $a = 1$ et $b = 2$.
2. Tant que $|a - b| > 10^{-n}$ faire
   (a) $c = a$
   (b) $a = 1 + \frac{1}{1+b}$
   (c) $b = 1 + \frac{1}{1+c}$
3. FIN

Dénombrabilité d'une réunion dénombrable d'ensembles finis

On se donne un nombre dénombrable d'ensembles finis, c'est-à-dire une suite E_1, E_2, $\ldots$, E_n, etc... d'ensembles finis (qui peuvent avoir des tailles différentes, mais jamais infinis). On veut démontrer que la réunion $\mathcal{E}$ de tous les ensembles E_i est dénombrable.

On procède de la manière suivante. On note e_i^1 les éléments de E_1. En les prenant dans un ordre quelconque, on pose $x_1 = e_1^1$, puis $x_2 = e_2^1$, et ainsi de suite jusqu'au dernier élément $x_n = e_n^1$ de E_1.

En notant e_i^2 (rien à voir avec le carré, c'est juste une notation) les éléments de E_2, on continue en posant $x_{n+1} = e_1^2$ si cet élément n'était pas déjà dans E_1, puis $x_{n+2} = e_2^2$ si cet élémet n'était pas déjà dans E_1, etc...

Ainsi, on construit une suite infini d'éléments x_1, x_2, $\ldots$, x_n, etc... dans laquelle on retrouve bien tous les éléments de tous les ensembles E_i. Ainsi, la réunion $\mathcal{E}$ de tous les ensembles E_i est dénombrable.

NB : on pourrait en fait supposer que les E_i sont eux-même dénombrables, mais la démonstration est plus pénible.